



TESIS - SM 142501

**ANALISIS KESTABILAN DAN STRATEGI
PEMBERIAN MAKANAN OPTIMAL PADA MODEL
PERTUMBUHAN MIKROALGA DALAM
BIOREAKTOR *FED-BATCH***

NAILUL IZZATI
NRP 1213 201 019

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016



THESIS - SM 142501

**STABILITY ANALYSIS AND OPTIMAL FEEDING
STRATEGY ON MICROALGAE GROWTH IN FED-
BATCH BIOREACTOR MODEL**

NAILUL IZZATI
NRP 1213 201 019

SUPERVISOR
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

MAGISTER DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCE
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

**ANALISIS KESTABILAN DAN STRATEGI PEMBERIAN MAKANAN
OPTIMAL PADA MODEL PERTUMBUHAN MIKROALGA DALAM
BIOREAKTOR FED-BATCH**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

NAILUL IZZATI

NRP. 1213 201 019

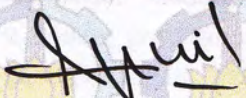
Tanggal Ujian : 13 Januari 2016

Periode Wisuda : Maret 2016

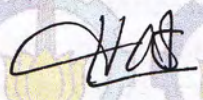
Disetujui oleh:


1. Dr. Dra. Mardlijah, M.T.
NIP. 19670114 199102 2 001

(Pembimbing)


2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.
NIP. 19660414 199102 2 001

(Penguji)


3. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.
NIP. 19830517 200812 1 003

(Penguji)


4. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.
NIP. 19730930 199702 1 001

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana,



Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19601202 198701 1 001

ANALISIS KESTABILAN DAN STRATEGI PEMBERIAN MAKANAN OPTIMAL PADA MODEL PERTUMBUHAN MIKROALGA DALAM BIOREAKTOR *FED-BATCH*

Nama : Nailul Izzati
NRP : 1213 201 019
Dosen Pembimbing : Dr. Dra. Mardijah, M.T.

ABSTRAK

Beberapa negara di dunia mulai beralih ke sumber energi alternatif untuk memenuhi kebutuhan bahan bakarnya. Salah satu bahan bakar alternatif yang banyak dikembangkan adalah biodiesel. Bahan baku pembuatan biodiesel dapat diperoleh antara lain dengan cara budidaya mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch*. Selain dibutuhkan pengetahuan tentang dinamika pertumbuhan mikroalga, dibutuhkan pula pengendalian optimal untuk meningkatkan produktivitas budidaya mikroalga. Dalam tesis ini dibahas model matematika pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch*, analisis kestabilan titik kesetimbangan, dan strategi pemberian makanan yang optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch* memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan trivial dan nontrivial. Titik kesetimbangan trivial bersifat stabil asimtotik dengan syarat laju pengenceran lebih besar daripada laju pertumbuhan maksimal mikroalga. Sedangkan titik kesetimbangan nontrivial bersifat tak stabil. Hasil simulasi numerik dengan DOTcvpSB menunjukkan bahwa model pertumbuhan mikroalga dengan pengendalian dalam pemberian makanan menghasilkan hasil panen yang lebih banyak dan biaya yang lebih minimum daripada model pertumbuhan mikroalga tanpa pengendalian.

Kata kunci: analisis kestabilan, bioreaktor *fed-batch*, mikroalga, Prinsip Minimum Pontryagin.

STABILITY ANALYSIS AND OPTIMAL FEEDING STRATEGY ON MICROALGAE GROWTH IN FED-BATCH BIOREACTOR MODEL

Name : Nailul Izzati
Student Identity Number : 1213 201 019
Supervisor : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

ABSTRACT

Some countries in the world turn to alternative energy source to fulfill their necessity of fuel. One of the alternative fuel is biodiesel. Raw material of biodiesel can be produced by microalgae cultivation in fed-batch bioreactor. To improve productivity of microalgae cultivation, we need to know the dynamic of microalgae growth and its optimal control. This thesis discusses mathematical model of microalgae growth in fed-batch bioreactor, stability analysis of equilibrium points and solves optimal feeding strategy problem by using Pontryagin Minimum Principle. Microalgae growth in fed-batch bioreactor model has two equilibrium points, that are trivial and nontrivial equilibrium points. Trivial equilibrium point is asymptotically stable on condition that dilution rate is higher than maximal microalgae growth rate. While nontrivial equilibrium point is unstable. Numerical simulation with DOTcvpSB shows that the controlled microalgae growth model yields more harvest and less cost function than the uncontrolled microalgae growth model.

Keywords: fed-batch bioreactor, microalgae, Pontryagin Minimum Principle, stability analysis.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya sehingga tesis yang berjudul “ANALISIS KESTABILAN DAN STRATEGI PEMBERIAN MAKANAN OPTIMAL PADA MODEL PERTUMBUHAN MIKROALGA DALAM BIOREAKTOR *FED-BATCH*” dapat diselesaikan. *Subhânaka lâ ‘ilma lanâ illâ mâ ‘allamtanâ, innaka antal ‘alîmul hakîm*. Maha Suci Engkau, tiada ilmu yang kami ketahui kecuali yang Engkau ajarkan kepada kami, sesungguhnya Engkaulah Yang Maha Mengetahui lagi Maha Bijaksana. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan pada Nabi Muhammad SAW yang telah menjadi jalan mengenal Dinul Islam.

Penyelesaian tesis ini tak luput dari dukungan dan bantuan banyak pihak. Oleh karena itu tak lupa penulis haturkan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D. selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
2. Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D. selaku Direktur Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. selaku Dekan Fakultas MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
4. Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T. selaku Kepala Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
5. Dr. Subiono, M.S. selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
6. Dr. Dra. Mardijah, M.T. selaku dosen pembimbing, atas segala bimbingan, motivasi, kesabaran, doa, waktu, serta ilmu yang telah diberikan selama pengerjaan tesis.
7. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Sc. selaku dosen wali sekaligus dosen penguji, atas bimbingan selama masa studi penulis, serta kritik, saran, dan bantuan dalam pengerjaan tesis.

8. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si. dan Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si. selaku dosen penguji, atas kritik, saran, dan bantuan yang diberikan selama pengerjaan tesis.
9. Segenap Bapak-Ibu Dosen Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya atas segala bimbingan, motivasi, doa, serta ilmu yang telah diberikan selama penulis menempuh pendidikan di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
10. Bapak, Mae, Mbak Yun, Mas Kam, Mbak Ida, Mas Anis, Mbak Pi, Mas Aas, Cimi, dan Faris, mas-mas dan mbak-mbak ipar, serta ponakan-ponakan, atas segala bentuk cinta dan doa yang tak pernah putus sampai saat ini.
11. Arina, Aya, Dita, Vita. Semoga persahabatan kita tak hanya di dunia, namun sampai ke surga-Nya. *Âmîn yâ Robbal ‘âlamîn.*
12. Seluruh mahasiswa Magister Matematika, khususnya angkatan 2013 atas persahabatan, dan kenangan. Terima kasih sudah menemani dan saling berbagi selama ini.
13. Seluruh pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu per satu, atas segala bantuan baik langsung maupun tak langsung.

Akhir kata, penulis berharap tesis ini dapat bermanfaat bagi para pembaca. Apabila terdapat kekurangan dari tesis ini, penulis dengan senang hati menerima saran atau kritik dari para pembaca. Saran dan kritik dapat dikirimkan melalui surel nellizz89@yahoo.com.

Surabaya, Januari 2015

Nailul Izzati

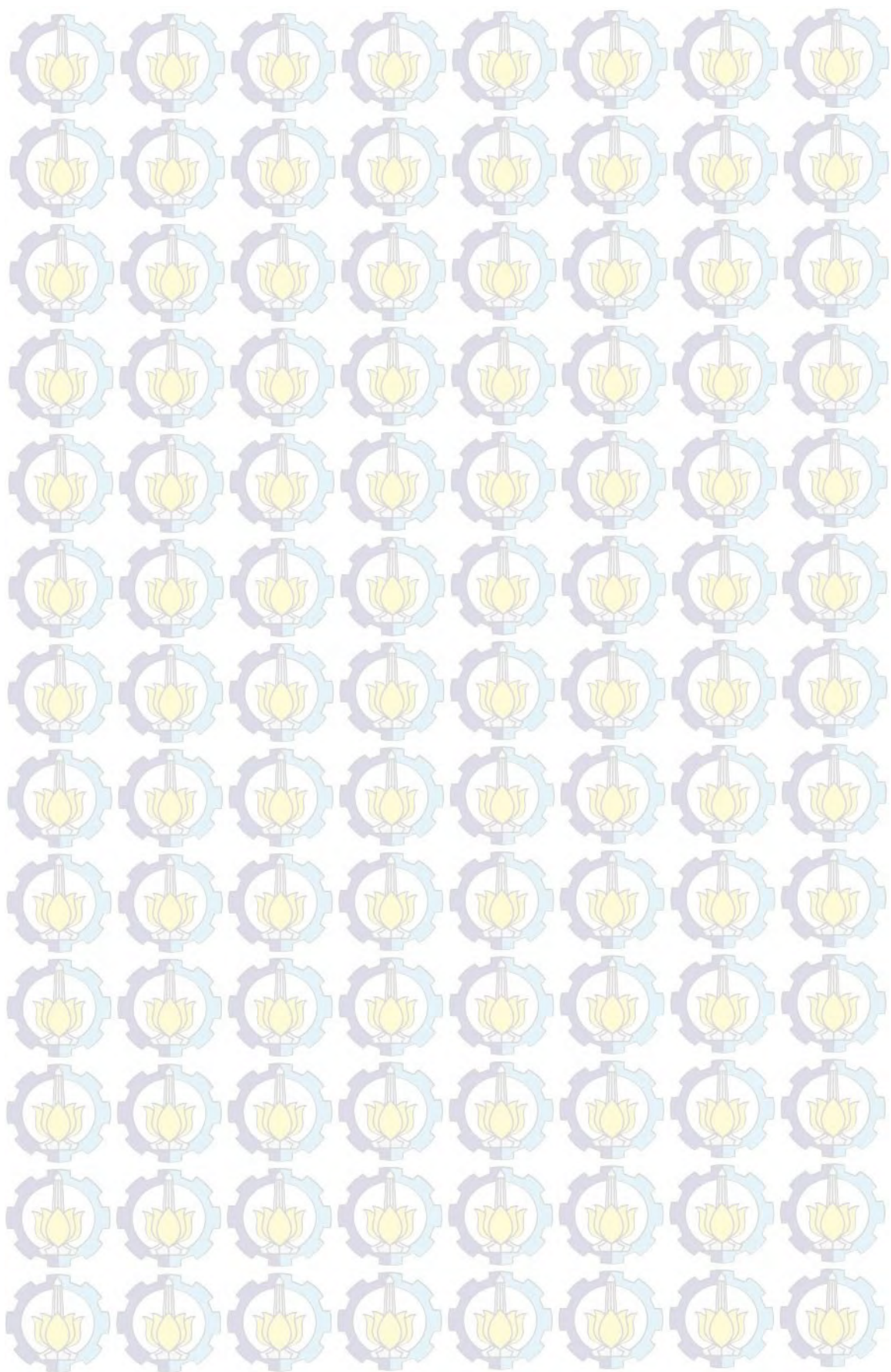
DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN.....	i
ABSTRAK.....	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR SIMBOL	xi
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI.....	5
2.1 Model Matematika Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i>	5
2.2 Linearisasi Model.....	6
2.3 Kriteria Routh-Hurwitz	8
2.4 Prinsip Minimum Pontryagin (PMP)	10
BAB 3 METODA PENELITIAN	13
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN.....	17
4.1 Modifikasi Model.....	17
4.2 Titik Keseimbangan	18
4.3 Kestabilan Titik Keseimbangan	19
4.3.1 Kestabilan Titik Keseimbangan Trivial	21
4.3.2 Kestabilan Titik Keseimbangan Nontrivial	21
4.4 Masalah Kendali Optimal.....	27
4.4.1 Model Pertumbuhan Mikroalga dengan Kendali	27
4.4.2 Fungsi Tujuan.....	28
4.4.3 Penyelesaian Masalah Kendali Optimal dengan Prinsip Minimum Pontryagin.....	28
4.5 Simulasi Numerik.....	34
4.5.1 Simulasi Model Tanpa Kendali.....	35

4.5.2	Simulasi Model dengan Kendali	41
BAB 5	PENUTUP	49
5.1	Kesimpulan	49
5.2	Saran	49
DAFTAR PUSTAKA		51
BIODATA PENULIS		53

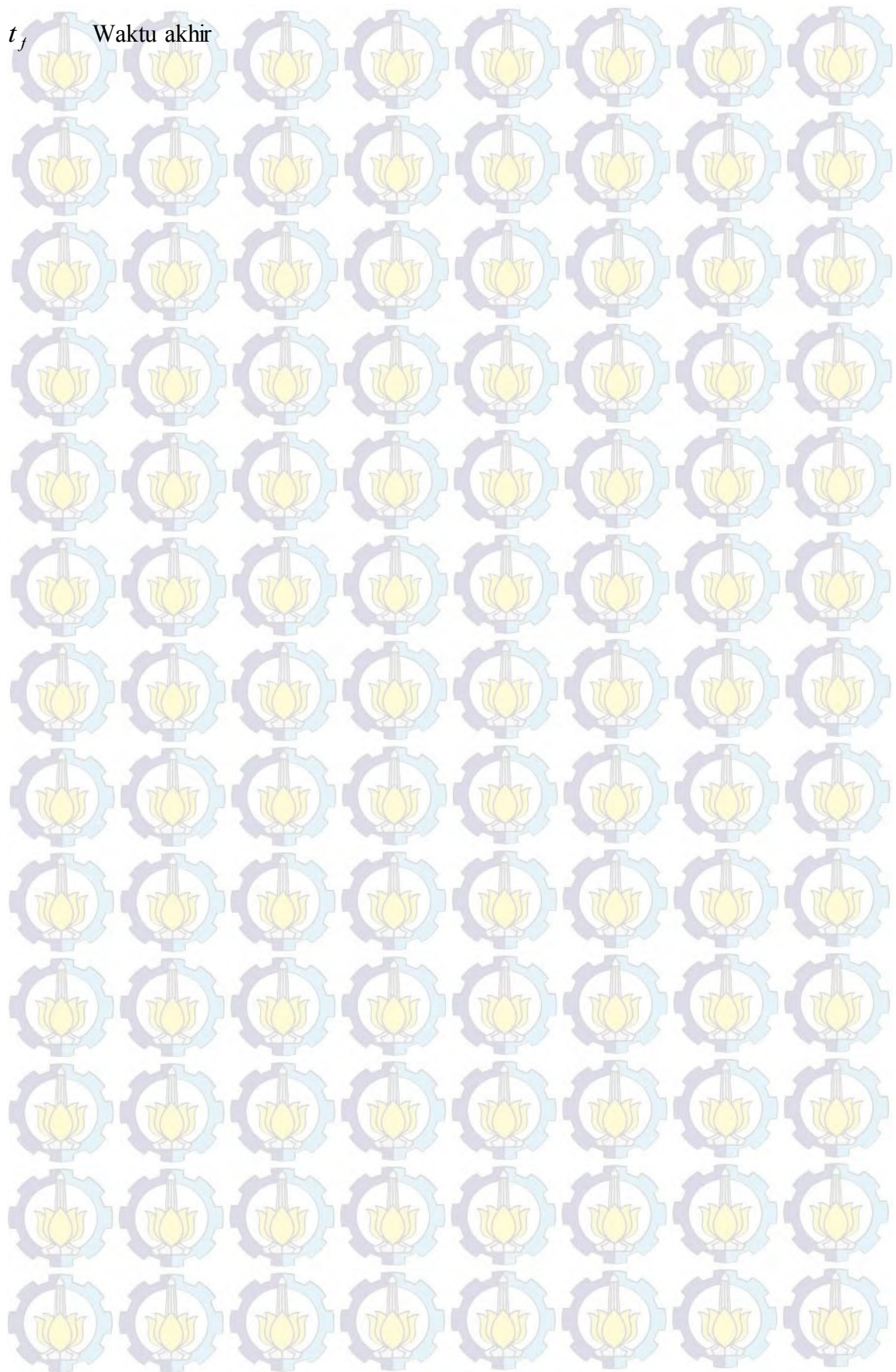
DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i> di sekitar E_1 dengan $f_1^i = 10$ dan $f_2^i = 20$ ($\mu_{\max} < D$).....	35
Gambar 4.2	Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i> di sekitar E_1 dengan $f_1^i = 1$, $f_2^i = 0.1$ ($\mu_{\max} > D$).....	36
Gambar 4.3	Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i> di sekitar E_1 dengan $f_1^i = 1$, $f_2^i = 1$ ($\mu_{\max} > D$).....	37
Gambar 4.4	Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i> di sekitar E_2 dengan $f_1^i = 10$, $f_2^i = 20$ ($\mu_{\max} > D$).....	38
Gambar 4.5	Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i> di sekitar E_2 dengan $f_1^i = 1$, $f_2^i = 0.1$ ($\mu_{\max} > D$).....	38
Gambar 4.6	Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i> di sekitar E_2 dengan $f_1^i = 1$, $f_2^i = 1$ ($\mu_{\max} > D$).....	39
Gambar 4.7	Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i> di sekitar E_2 dengan $f_1^i = 10.18$ dan $f_2^i = 18.18$ ($\mu_{\max} = D$).....	39
Gambar 4.8	Simulasi Numerik Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i> Tanpa Strategi Pemberian Makanan	42
Gambar 4.9	Simulasi Numerik Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i> dengan Strategi Pemberian Makanan.....	42
Gambar 4.10	Strategi Pemberian Makanan Optimal dalam Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i>	43



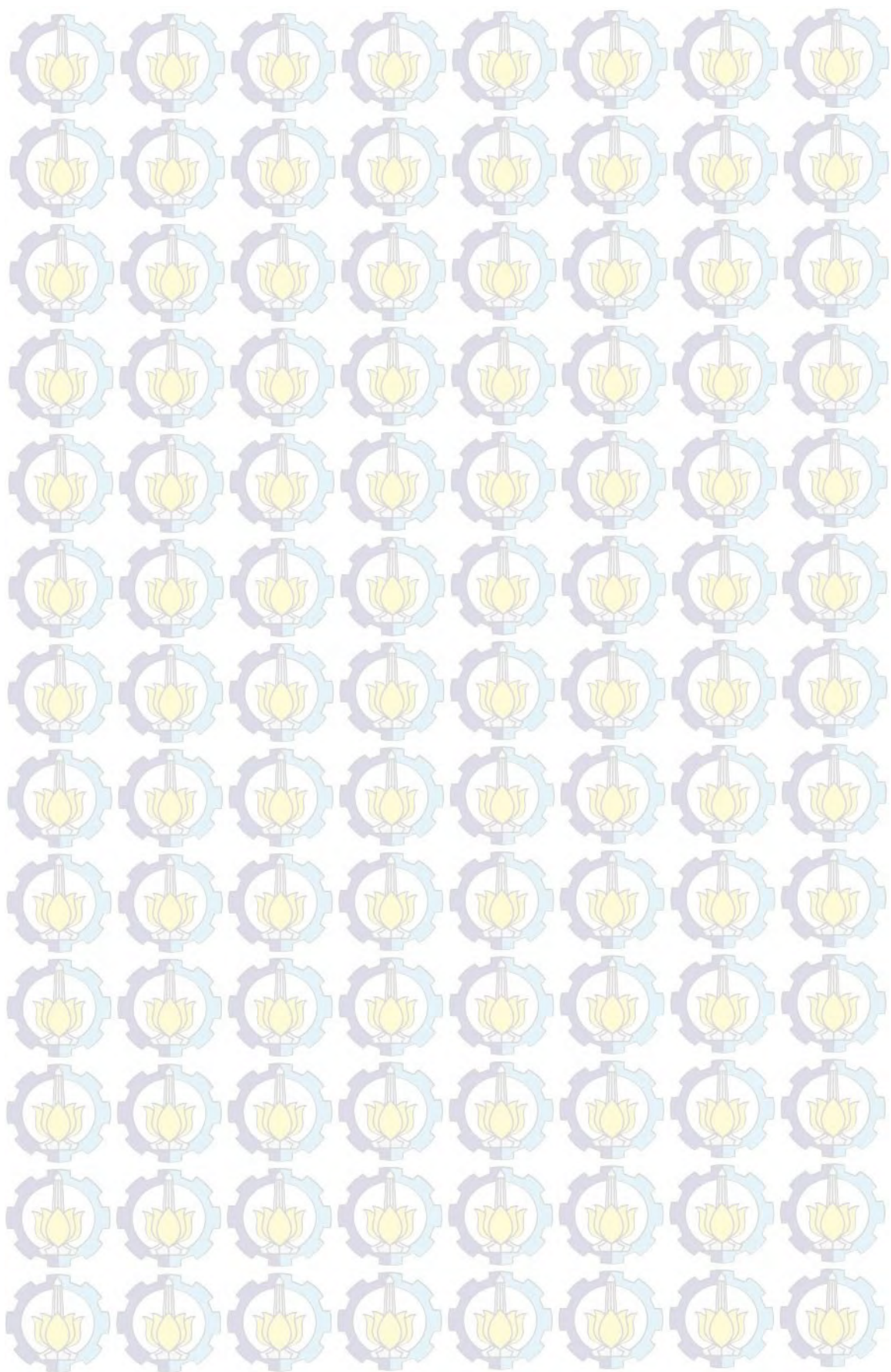
DAFTAR SIMBOL

S_1	Konsentrasi <i>glycine</i> dalam bioreaktor
S_2	Konsentrasi glukosa dalam bioreaktor
x	Konsentrasi biomassa aktif
p	Konsentrasi lipid dalam sel
q	Konsentrasi nitrogen dalam sel
V	Volume bioreaktor
s_1^i	Konsentrasi <i>glycine</i> yang diinputkan
s_2^i	Konsentrasi glukosa yang diinputkan
f_1^i	Laju pemberian makanan berupa <i>glycine</i>
f_2^i	Laju pemberian makanan berupa glukosa
ρ	Laju penyerapan nitrogen oleh mikroalga
μ	Laju penyerapan glukosa oleh mikroalga yang digunakan untuk memproduksi biomassa
π	Laju penyerapan glukosa oleh mikroalga yang digunakan untuk memproduksi lipid
$\frac{1}{Y_{x/s}}$	Proporsi glukosa yang digunakan untuk memproduksi biomassa
$\frac{1}{Y_{p/s}}$	Proporsi glukosa yang digunakan untuk memproduksi lipid
$\frac{1}{Y_{x/p}}$	Proporsi lipid yang digunakan untuk memproduksi biomassa
$\frac{1}{Y_{x/q}}$	Proporsi nitrogen yang digunakan untuk memproduksi biomassa
k_m	Laju <i>maintenance</i>
D	Laju pengenceran
f^o	Aliran yang keluar dari bioreaktor
t	Waktu
t_0	Waktu awal



DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Parameter pada Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor <i>Fed-Batch</i>	34
Tabel 4.2	Perbandingan Nilai-Nilai Variabel Kendali pada Model Pertumbuhan Mikroalga dengan Pengendalian dan Tanpa Pengendalian	46
Tabel 4.3	Perbandingan Nilai-Nilai Variabel <i>State</i> pada Model Pertumbuhan Mikroalga dengan Pengendalian dan Tanpa Pengendalian	47



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bahan bakar minyak merupakan salah satu kebutuhan utama dalam kehidupan sehari-hari. Hampir semua kegiatan membutuhkan bahan bakar minyak. Kebutuhan akan bahan bakar minyak terus meningkat setiap tahunnya. Hal ini dipengaruhi oleh semakin banyaknya jumlah penduduk serta semakin berkembangnya ekonomi dan industri di dunia. Sebagian besar dari kebutuhan bahan bakar minyak dipenuhi oleh sumber energi fosil, yang merupakan sumber energi tak terbarukan, sehingga sumber energi fosil semakin lama semakin menipis.

Cadangan minyak bumi tertinggi di dunia dimiliki oleh Venezuela yakni sebesar 297,6 miliar barel. Sedangkan Indonesia memiliki cadangan minyak sebesar 3,7 miliar barel. Produksi minyak bumi Indonesia adalah sebesar 882 ribu barel per hari, sedangkan konsumsinya adalah sebesar 1,6 juta barel per hari (British Petroleum, 2014). Hal ini menyebabkan Indonesia harus mengimpor sekitar 700 ribu barel per hari.

Beberapa negara sudah mulai beralih ke sumber energi alternatif yang terbarukan. Sumber energi alternatif yang sudah dikembangkan antara lain *biofuel* yang berbahan baku biomassa. Biomassa adalah material yang berasal dari organisme hidup yang dapat digunakan sebagai bahan bakar. Biomassa dapat diperoleh antara lain dari tanaman yang mengandung minyak seperti jagung dan kelapa sawit, budidaya mikroalga, limbah peternakan maupun pertanian.

Menurut penelitian Chisti (2007), jika dibandingkan dengan sumber biomassa lainnya, mikroalga mempunyai beberapa kelebihan, yaitu dapat dikembangbiakkan sepanjang tahun, lebih hemat air dan lahan. Mikroalga dapat tumbuh dengan cepat dan kaya kandungan minyak. Kandungan minyak dari mikroalga dapat mencapai 80% dari berat biomassa keringnya. Produksi minyak yang dapat diperoleh dari budidaya mikroalga bergantung pada laju pertumbuhan alga dan kandungan minyak pada biomasanya. Namun untuk pengaturannya,

budidaya mikroalga memerlukan biaya yang cukup mahal. Oleh karena itu, selain diperlukan pemahaman perilaku dinamika perkembangbiakan mikroalga dalam bioreaktor, diperlukan pula pengendalian proses budidaya mikroalga agar hasil panen dapat dioptimalkan.

Penelitian tentang pengendalian bioreaktor telah banyak dilakukan. De la Hoz Siegler dkk (2011) mengkonstruksi sebuah model yang menggambarkan pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch*. Kemudian De la Hoz Siegler dkk (2012) menerapkan *Adaptive Model Predictive Control* pada model tersebut untuk mengoptimalkan produktivitas budidaya mikroalga. Tujuan dari optimasi yang dilakukan adalah menemukan strategi pemberian makanan optimal sebagai kendali untuk memaksimalkan produktivitas budidaya mikroalga.

Abdollahi dan Dubljevic (2012) meneliti tentang pengoptimalan produksi biomassa dan konsentrasi lipid mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch* dengan mengacu pada model yang dikonstruksi oleh De la Hoz Siegler dkk. *Interior point optimization* (IPOPT) digunakan untuk mengetahui trayektori acuan dari model tersebut. Kemudian dengan menggabungkan *Model Predictive Control* (MPC) dan *Moving Horizon Estimation* (MHE), diketahui strategi pemberian makanan yang optimal untuk memaksimalkan produksi biomassa dan konsentrasi lipid dari mikroalga.

Beberapa metode telah digunakan untuk menyelesaikan masalah kendali optimal pada model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch* yang dikonstruksi oleh De la Hoz Siegler dkk (2011). Namun belum ada yang menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin (PMP) untuk menemukan strategi pemberian makanan optimal pada model tersebut. Selain itu, analisis kestabilan titik kesetimbangan pada model juga belum dibahas.

Dalam tesis ini dilakukan modifikasi dari model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch* yang dikonstruksi oleh De la Hoz Siegler dkk (2011). Kemudian dibahas mengenai analisis kestabilan titik kesetimbangan pada model, beserta masalah kendali optimal untuk memaksimalkan hasil panen dan meminimumkan biaya pemberian makanan menggunakan PMP. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik dari analisis kestabilan dan masalah kendali optimal dari model tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan, rumusan masalah tesis ini adalah:

1. Bagaimana modifikasi model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor?
2. Bagaimana analisis kestabilan model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor?
3. Bagaimana masalah kendali optimal untuk memaksimalkan hasil panen dan meminimumkan biaya pemberian makanan pada model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor dengan menggunakan PMP?
4. Bagaimana simulasi numerik analisis kestabilan dan masalah kendali optimal pada model tersebut?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Jenis bioreaktor yang digunakan adalah *fed-batch*.
2. Hasil panen dari budidaya mikroalga adalah biomassa dan lipid.
3. Jenis mikroalga yang digunakan adalah *Auxenochlorella protothecoides*.

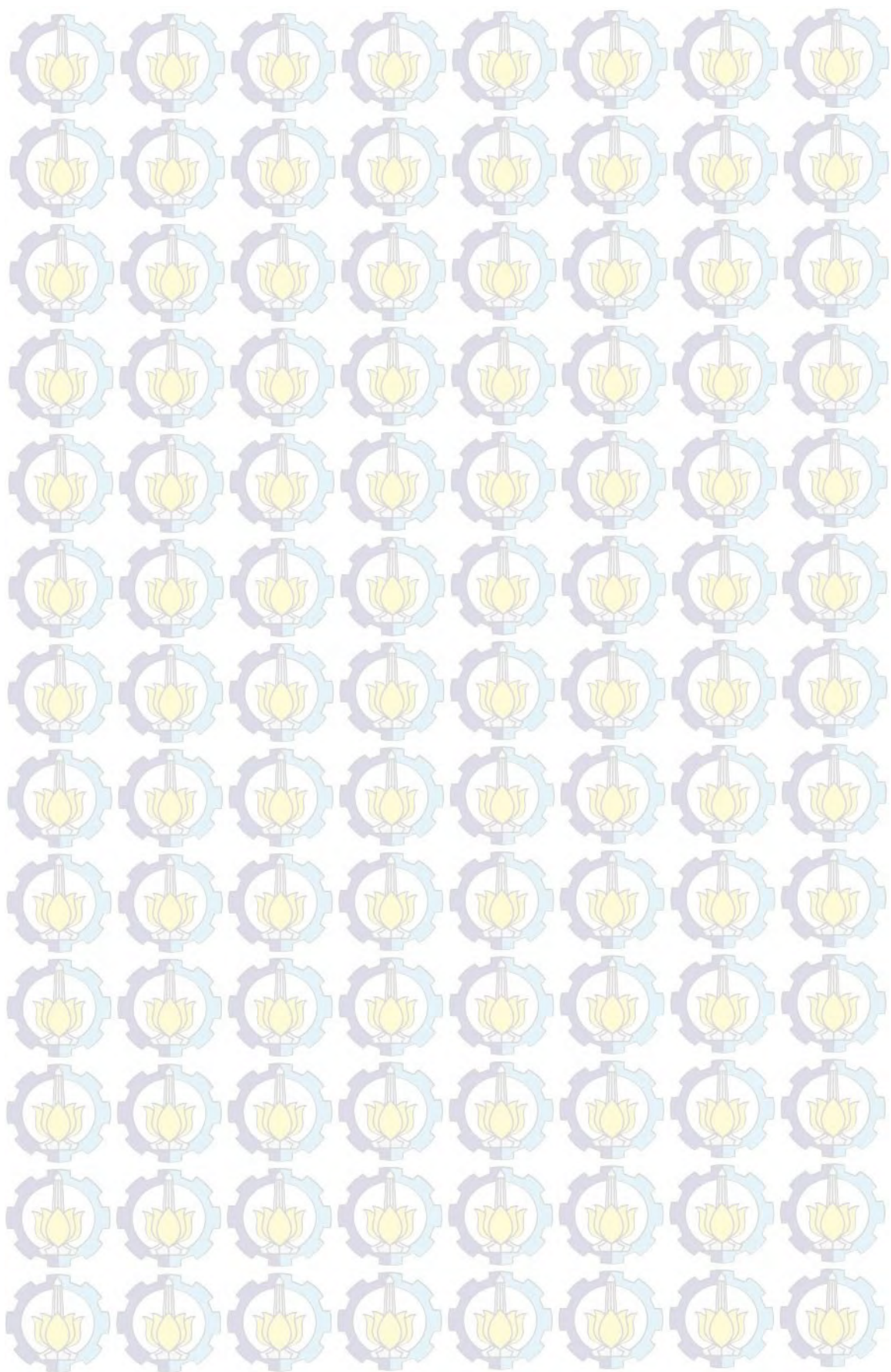
1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari tesis ini adalah:

1. Memodifikasi model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor.
2. Menganalisis kestabilan model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor.
3. Melakukan formulasi masalah kendali optimal untuk memaksimalkan hasil panen dan meminimumkan biaya pemberian makanan pada model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor dengan menggunakan PMP.
4. Mengetahui simulasi numerik analisis kestabilan dan masalah kendali optimal pada model tersebut.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat tesis ini adalah untuk memberikan alternatif metode kendali dalam pengendalian sistem bioreaktor sehingga hasil panen dan biaya pemberian makanan dari budidaya mikroalga dapat dioptimalkan.



BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Model Matematika Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch*

Dalam pengoperasian bioreaktor *fed-batch*, reaktan ditambahkan tanpa ada pengambilan produk, atau produk boleh diambil tanpa ada penambahan reaktan, atau kombinasi periodik dari keduanya (Ibarra-Junquera, Jorgensen, Virgen-Ortiz, Escalante-Minakata, & Osuna-Castro, 2012). De la Hoz Siegler dkk (2011) memodelkan dinamika pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch* dengan persamaan (2.1.a)-(2.1.f) berikut ini.

$$\frac{dS_1}{dt} = -\rho x + s_1^i \frac{f_1^i}{V} - S_1 D \quad (2.1.a)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\frac{1}{Y_{x/s}} \mu x - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi x - k_m x + s_2^i \frac{f_2^i}{V} - S_2 D \quad (2.1.b)$$

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x D \quad (2.1.c)$$

$$\frac{dp}{dt} = \pi x - \frac{1}{Y_{x/p}} \mu x - p D \quad (2.1.d)$$

$$\frac{dq}{dt} = \rho x - \frac{1}{Y_{x/q}} \mu x - q D \quad (2.1.e)$$

$$\frac{dV}{dt} = V D - f^o \quad (2.1.f)$$

Sistem persamaan (2.1.a)-(2.1.f) menggambarkan pertumbuhan biomassa dan produksi lipid pada mikroalga *Auxenochlorella protothecoides*. Pertumbuhan mikroalga dalam suatu bejana bioreaktor membutuhkan nutrisi dan substrat sebagai sumber makanan. Dalam penelitian De la Hoz Siegler dkk, digunakan dua substrat utama yaitu *glycine* sebagai sumber nitrogen dan glukosa sebagai sumber karbon.

Diasumsikan bahwa sel alga terdiri dari tiga komponen, yaitu biomassa aktif, kandungan lipid dan kandungan nitrogen. Ketiga komponen ini dapat saling

berubah dari komponen satu ke yang lain dengan laju konstan Y_{ij} . Perubahan yang diamati dalam model bioreaktor adalah konsentrasi *glycine* (S_1), konsentrasi glukosa (S_2), konsentrasi biomassa (x), konsentrasi lipid (p), konsentrasi nitrogen dalam mikroalga (q), dan volume dalam bioreaktor (V).

Glycine yang diinputkan ke dalam bioreaktor mempunyai konsentrasi sebesar s_1^i dan laju pemberian makanan sebesar f_1^i . Sedangkan glukosa yang diinputkan mempunyai konsentrasi sebesar s_2^i dan laju pemberian makanan sebesar f_2^i . Laju penyerapan nitrogen ke dalam sel dinyatakan oleh ρ . Laju penyerapan glukosa yang digunakan untuk memproduksi biomassa dinyatakan oleh μ . Laju penyerapan glukosa yang digunakan untuk memproduksi lipid dinyatakan oleh π . k_m merupakan laju *maintenance*, D adalah laju pengenceran, dan f^o adalah aliran yang keluar dari bioreaktor.

Model pertumbuhan mikroalga tersebut, mempunyai kendala-kendala yang dinyatakan oleh pertaksamaan (2.2).

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_1^i \leq 2, \\ 0 &\leq f_2^i \leq 10, \\ 0 &\leq V \leq 2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dengan keadaan awal dan keadaan akhir sistem

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_f &= 150 \text{ jam.} \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2 Linearisasi Model

Misalkan terdapat sistem (2.4) yang merupakan sistem otonomus tak linear.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Jika diasumsikan bahwa (x^*, y^*) merupakan titik kritis terisolasi dari sistem (2.4).

Sistem (2.4) adalah hampir linear di persekitaran (x^*, y^*) jika fungsi F dan G

mempunyai turunan parsial sampai order 2 yang kontinu di titik (x^*, y^*) . Untuk menunjukkan hal ini, digunakan deret Taylor dari F dan G di sekitar (x^*, y^*) , yaitu

$$F(x, y) = F(x^*, y^*) + \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_1(x, y) \quad (2.5)$$

$$G(x, y) = G(x^*, y^*) + \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_2(x, y) \quad (2.6)$$

dengan

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x, y)}{\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}} = 0, \quad (2.7)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x, y)}{\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}} = 0.$$

Perlu dicatat bahwa $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$, $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt}$ dan

$\frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y^*)}{dt}$, sehingga sistem (2.4) dapat direduksi menjadi

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

atau, dalam notasi vektor,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{u} + \bar{\eta}(\mathbf{x}), \quad (2.9)$$

dengan $\mathbf{u} = (x - x^*, y - y^*)^T$, dan $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^T$.

Dengan demikian, sistem linear yang berkorespondensi dengan sistem nonlinear (2.4) di sekitar titik (x^*, y^*) diberikan oleh bagian linear dari persamaan (2.8) atau (2.9), yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

dengan $u_1 = x - x^*$ dan $u_2 = y - y^*$. Persamaan (2.10) merupakan metode yang umum dan mudah untuk menemukan sistem linear yang berkorespondensi dengan suatu sistem hampir linear di sekitar suatu titik kritis.

Matriks

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

yang merupakan matriks koefisien dalam persamaan (2.10), disebut dengan matriks Jacobi dari fungsi F dan G terhadap variabel x dan y . Perlu diasumsikan bahwa $\det(J)$ tidak sama dengan nol pada (x^*, y^*) sehingga titik ini juga merupakan titik kritis terisolasi dari sistem linear (2.10) (Brannan & Boyce, 2011).

Misalkan λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen dari sistem linear (2.10) yang berkorespondensi dengan sistem hampir linear (2.9). Kestabilan titik kritis dari sistem (2.10) ditunjukkan oleh Tabel 2.1 (Boyce & DiPrima, 2005).

Tabel 2.1 Sifat Kestabilan Titik Kritis Sistem Linear

Nilai Eigen	Kriteria	Kestabilan	Tipe
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tak stabil	Simpul
	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	Simpul
	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Tak stabil	Pelana
$\lambda_1, \lambda_2 = \mu \pm iv$	$\mu > 0$	Tak stabil	Spiral
	$\mu < 0$	Stabil asimtotik	Spiral
	$\mu = 0$	Stabil	Pusat

2.3 Kriteria Routh-Hurwitz

Sistem otonomus dengan sebuah matriks Jacobi yang berbentuk

$$J = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \dots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

mempunyai nilai-nilai eigen yang dapat diperoleh dengan menyelesaikan $|J - \lambda I| = 0$ sehingga diperoleh polinomial

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (2.13)$$

dengan $a_n = 1$.

Solusi sistem otonomus tersebut akan stabil jika semua bagian real dari akar polinomial (2.13) bernilai negatif, dengan kata lain $\text{Re}(\lambda_j) < 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Kriteria Routh-Hurwitz dapat digunakan untuk mengetahui kestabilan tanpa menghitung akar-akar polinomial (2.13), yaitu dengan melakukan suatu penabelan dan aturan penghitungan dari koefisien a_j , $j = 0, 1, \dots, n$.

Diberikan polinomial

$$Q(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad (2.14)$$

dengan $a_n \neq 1$. Dari polinomial (2.14) disusun tabel sebagai berikut.

λ^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
λ^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	
\vdots	\vdots			
λ^0	e			

Dengan $b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$, dan e secara rekursif diperoleh dari

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}, \quad \dots$$

Jika tidak terdapat perubahan tanda pada kolom pertama, maka semua bagian real dari akar polinomial (2.14) adalah tak positif. Dengan demikian solusi sistem otonomus tersebut adalah stabil (Subiono, 2013).

2.4 Prinsip Minimum Pontryagin (PMP)

Dengan mengacu pada Naidu (2003), pada bagian ini dibahas mengenai penerapan PMP pada suatu masalah kendali optimal. Formulasi masalah kendali optimal membutuhkan tiga hal berikut ini:

1. Deskripsi atau model matematika dari suatu proses yang ingin dikendalikan, umumnya dalam bentuk variabel *state*.
2. Spesifikasi dari fungsi tujuan.
3. Kondisi batas dan kendala fisis dari *state* dan/atau kendali.

Misalkan diberikan sistem kendali optimal sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.15)$$

dengan $\mathbf{x}(t)$ dan $\mathbf{u}(t)$ adalah variabel *state* dan kendali, dan fungsi tujuan

$$J = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad (2.16)$$

serta syarat batas

$$\mathbf{x}(t_0 = 0) = \mathbf{x}_0, \quad t_f \text{ dan } \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \text{ bebas.} \quad (2.17)$$

Dengan kendala dari variabel *state* dan kendali dinyatakan oleh

$$\mathbf{U}_- \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{U}_+ \text{ dan } \mathbf{X}_- \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{X}_+. \quad (2.18)$$

Solusi dari masalah kendali optimal di atas dapat diselesaikan menggunakan PMP dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Bentuk fungsi Hamiltonian H

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda'(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.19)$$

dengan $\lambda(t)$ adalah variabel *costate*.

2. Minimumkan H terhadap $\mathbf{u}(t)$ ($\leq \mathbf{U}$)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)_* = 0 \quad (2.20)$$

sehingga diperoleh kendali optimal $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \lambda^*(t), t)$.

3. Kendali optimal yang diperoleh pada langkah 2 disubstitusikan ke langkah 1, sehingga diperoleh Hamiltonian optimal H^* .

$$H^*(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(\mathbf{x}^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (2.21)$$

4. Selesaikan $2n$ buah persamaan, dengan n adalah jumlah variabel *state*

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)_* \text{ dan } \dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_* \quad (2.22)$$

dengan kondisi batas dan kondisi *transversality*

$$\left(H + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{*t_f} \delta t_f + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right) - \lambda(t) \right)_{*t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0. \quad (2.23)$$

Dipandang dari kondisi akhirnya, terdapat lima tipe sistem dalam masalah kendali optimal, yaitu:

- a. Sistem dengan *fixed-final time* dan *fixed-final state*

Sistem ini memiliki waktu akhir t_f dan kondisi akhir $\mathbf{x}(t_f)$ *fixed* sehingga tidak ada variasi dari waktu akhir ($\delta t_f = 0$) maupun kondisi akhir ($\delta \mathbf{x}_f = 0$). Dengan demikian untuk menyelesaikan masalah kendali optimal tidak diperlukan kondisi *transversality*, cukup dengan syarat batas (2.17) yang telah diberikan.

- b. Sistem dengan *free-final time* dan *fixed-final state*

Waktu akhir dari sistem ini tidak ditentukan sedangkan kondisi akhirnya adalah *fixed* sehingga terdapat variasi dari waktu akhir ($\delta t_f \neq 0$) namun tidak ada variasi dari kondisi akhir ($\delta \mathbf{x}_f = 0$). Dengan demikian diperlukan kondisi *transversality* yaitu

$$\left(H + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{t_f} = 0. \quad (2.24)$$

- c. Sistem dengan *fixed-final time* dan *free-final state*

Sistem ini mempunyai waktu akhir yang telah ditentukan namun kondisi akhirnya bebas sehingga tidak terdapat variasi dari waktu akhir ($\delta t_f = 0$)

namun terdapat variasi kondisi akhir ($\delta x_f \neq 0$). Dengan demikian kondisi *transversality* yang harus diperhatikan adalah

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \bar{\lambda}(t) \right)_{t_f} = 0.$$

$$\bar{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_f}. \quad (2.25)$$

d. Sistem dengan *free-final time* dan *independent free-final state*

Sistem dengan tipe ini memiliki waktu akhir dan kondisi akhir yang tidak ditentukan sehingga terdapat variasi waktu akhir dan kondisi akhir ($\delta t_f \neq 0$ dan $\delta x_f \neq 0$). Jika waktu akhir dan kondisi akhir *state* tidak saling bergantung maka variasi dari waktu akhir dan kondisi akhir *state* juga tidak saling bergantung. Dengan demikian kondisi *transversality* dari tipe sistem ini adalah

$$\left(H + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{t_f} = 0, \quad (2.26)$$

dan

$$\bar{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_f}. \quad (2.27)$$

e. Sistem dengan *free-final time* dan *dependent free-final state*

Pada sistem dengan *free-final time* dan *independent free-final state*, kondisi akhir *state* tidak bergantung pada suatu lintasan. Lain halnya dengan tipe sistem *dependent free-final state*. Pada tipe sistem ini, kondisi akhir *state* bergantung pada suatu lintasan tertentu yang dipengaruhi oleh waktu akhir. Bisa dikatakan bahwa kondisi akhir dan waktu akhir saling bergantung, yang dinyatakan oleh $x(t_f) = \theta(t_f)$ dan $\delta x_f \approx \dot{\theta}(t_f) \delta t_f$. Oleh karena t_f bebas, maka δt_f adalah sembarang. Dengan demikian diperoleh kondisi *transversality* yang perlu diperhitungkan adalah

$$\left(H + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{*t_f} + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right) - \lambda(t) \right)_{*t_f} = 0. \quad (2.28)$$

BAB 3

METODA PENELITIAN

Langkah-langkah yang ditempuh untuk melakukan penelitian dalam tesis ini dijelaskan sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Langkah pertama untuk memulai suatu penelitian adalah melakukan studi literatur. Studi literatur dilakukan untuk memahami prinsip kerja bioreaktor, metabolisme mikroalga, menentukan model bioreaktor yang akan digunakan, dan metode yang sesuai untuk menyelesaikan masalah pengendalian bioreaktor. Studi literatur dari penelitian terdahulu juga dilakukan agar mengetahui hal yang dapat dibahas sebagai perbandingan maupun pengembangan dari penelitian terdahulu. Literatur yang dipelajari dapat diperoleh melalui buku, tugas akhir, tesis, artikel dan jurnal.

2. Modifikasi Model

Modifikasi model dilakukan dengan mengubah asumsi variabel dan laju penyerapan nutrisi yang digunakan pada model De la Hoz Siegler dkk (2011). Pada penelitian ini diasumsikan bahwa model mempunyai lima variabel *state*, yaitu konsentrasi *glycine* (S_1), glukosa (S_2), biomassa (x), lipid (p), dan nitrogen (q).

3. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Langkah awal untuk melakukan analisa kestabilan adalah menentukan titik kesetimbangan dari sistem. Oleh karena sistem yang digunakan dalam tesis ini merupakan sistem nonlinear, maka untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangannya, dilakukan linierisasi pada sistem tersebut. Sifat kestabilan titik kesetimbangan dapat diketahui dengan melihat nilai eigen yang diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J - \lambda I| = 0$, dengan J adalah matriks Jacobi yang berkaitan dengan sistem hasil pelinearan.

4. Masalah Kendali Optimal

Pada tahap ini dibahas masalah kendali optimal pada model, meliputi sistem dinamik, fungsi tujuan dan syarat batas yang digunakan. Kendali dari model pertumbuhan mikroalga pada penelitian ini adalah laju pemberian makanan. Laju pemberian makanan berupa *glycine* adalah kendali yang pertama (u_1). Sedangkan laju pemberian makanan berupa glukosa adalah kendali yang kedua (u_2).

5. Menentukan Penyelesaian Masalah Kendali Optimal

Masalah kendali optimal dalam penelitian ini diselesaikan dengan Prinsip Minimum Pontryagin. Kendala dari sistem tersebut diberikan oleh pertaksamaan (2.2). Waktu awal dan akhir proses, serta kondisi awal dinyatakan oleh persamaan (2.3). Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap ini adalah sebagai berikut:

Langkah 1. Membentuk fungsi Hamiltonian H .

Langkah 2. Menemukan kendali optimal u_1^* dan u_2^* dengan cara menghitung $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$ dan $\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$.

Langkah 3. Mensubstitusikan kendali optimal u_1^* dan u_2^* yang diperoleh dari langkah 2 ke dalam fungsi Hamiltonian H sehingga didapatkan fungsi Hamiltonian optimal H^* .

Langkah 4. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial *state* dan *costate* dengan kondisi batas yang harus dipenuhi. Persamaan diferensial *state* diperoleh dengan menghitung

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)_*$$

didapatkan dengan menghitung $\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_*$. Dengan

$$\mathbf{x} = (S_1, S_2, x, p, q) \text{ dan } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5).$$

6. Simulasi Numerik

Pada tahap ini dilakukan simulasi numerik dari kestabilan titik kesetimbangan dan penyelesaian masalah kendali optimal pada model

pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor. Simulasi numerik untuk kestabilan titik kesetimbangan dilakukan dengan metode Runge-Kutta Orde 4. Sedangkan simulasi numerik untuk menyelesaikan masalah kendali optimal dilakukan dengan *toolbox* DOTcvpSB *software* MATLAB. Hasil yang diperoleh dari simulasi numerik selanjutnya dianalisa dan diinterpretasikan.

7. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan analisa hasil analitik dan simulasi numerik dapat ditarik suatu kesimpulan tentang penerapan Prinsip Minimum Pontryagin pada model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch*. Kekurangan dari penelitian dapat dijadikan saran untuk penelitian selanjutnya sebagai perbaikan dari penelitian yang telah dilakukan.

8. Penulisan Laporan

Hasil dari langkah-langkah yang telah dilakukan kemudian dilaporkan hasil dan pembahasannya pada laporan penelitian berupa tesis.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Modifikasi Model

Model (2.1.a)-(2.1.f) menggambarkan pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch* dengan mempertimbangkan konsentrasi *glycine*, konsentrasi glukosa, konsentrasi biomassa, konsentrasi lipid, konsentrasi nitrogen, dan volume sebagai variabel *state* dari sistem. Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa volume dari bioreaktor adalah konstan. Artinya, volume penambahan substrat ke dalam bioreaktor diasumsikan sebanding dengan volume yang diserap oleh mikroalga. Dengan kata lain, adanya penambahan dan penyerapan substrat yang terjadi dalam bioreaktor tidak mengubah volume, hanya mengubah nilai konsentrasi dari substrat dan produk dari budidaya mikroalga, sehingga volume tidak dipertimbangkan sebagai variabel *state*.

Variabel *state* yang dipertimbangkan adalah konsentrasi substrat yaitu *glycine* (S_1) dan glukosa (S_2), serta konsentrasi produk yaitu biomassa (x), lipid (p), dan nitrogen (q) dalam bioreaktor. Dengan demikian, diperoleh sistem persamaan (4.1a)-(4.1e).

$$\frac{dS_1}{dt} = -\rho x + s_1^i \frac{f_1^i}{V} - S_1 D, \quad (4.1a)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\frac{1}{Y_{x/s}} \mu x - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi x - k_m x + s_2^i \frac{f_2^i}{V} - S_2 D, \quad (4.1b)$$

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x D, \quad (4.1c)$$

$$\frac{dp}{dt} = \pi x - \frac{1}{Y_{x/p}} \mu x - p D, \quad (4.1d)$$

$$\frac{dq}{dt} = \rho x - \frac{1}{Y_{x/q}} \mu x - q D. \quad (4.1e)$$

Diasumsikan bahwa laju pertumbuhan mikroalga (μ) bergantung pada konsentrasi glukosa (S_2) dan nitrogen (q). Sedangkan laju penyerapan nitrogen

ke dalam sel (ρ) bergantung pada konsentrasi *glycine* (S_1). Dan laju produksi lipid bergantung pada konsentrasi glukosa (S_2). Dengan mengacu pada kinetika Michaelis-Menten, maka dapat dituliskan secara matematis bahwa

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q}, \quad (4.2)$$

$$\pi = \pi_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2}, \quad (4.3)$$

$$\rho = \rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1}, \quad (4.4)$$

dengan μ_{\max} adalah laju pertumbuhan mikroalga maksimal, π_{\max} adalah laju penyerapan nitrogen maksimal, ρ_{\max} adalah laju produksi lipid maksimal, K_{S_2} adalah konstanta setengah jenuh untuk glukosa, K_{S_1} adalah konstanta setengah jenuh untuk *glycine*, K_q adalah konstanta setengah jenuh untuk penyerapan nitrogen.

4.2 Titik Keseimbangan

Titik kesetimbangan sistem (4.1a)-(4.1e) diperoleh ketika $\frac{dS_1}{dt} = 0$, $\frac{dS_2}{dt} = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dp}{dt} = 0$, dan $\frac{dq}{dt} = 0$. Dengan melihat persamaan-persamaan yang ada pada sistem (4.1a)-(4.1e) dan (4.2)-(4.4), maka diperoleh

$$-\rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} x + s_1^i \frac{f_1^i}{V} - S_1 D = 0, \quad (4.5a)$$

$$\left(-\frac{1}{Y_{x/s}} \mu_{\max} \frac{q}{K_q + q} - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi_{\max} \right) \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x - k_m x + s_2^i \frac{f_2^i}{V} - S_2 D = 0, \quad (4.5b)$$

$$\mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x - x D = 0, \quad (4.5c)$$

$$\pi_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x - \frac{1}{Y_{x/p}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x - p D = 0, \quad (4.5d)$$

$$\rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} x - \frac{1}{Y_{x/q}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x - qD = 0. \quad (4.5e)$$

Dari persamaan (4.5c) diperoleh solusi trivial $x = 0$. Substitusi $x = 0$ ke dalam persamaan (4.5a), (4.5b), (4.5d), dan (4.5e) menghasilkan $S_1 = \frac{s_1^i f_1^i}{VD}$,

$$S_2 = \frac{s_2^i f_2^i}{VD}, \quad p = 0, \quad \text{dan} \quad q = 0. \quad \text{Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan}$$

$$E_1 = \left(\frac{s_1^i f_1^i}{VD}, \frac{s_2^i f_2^i}{VD}, 0, 0, 0 \right).$$

Solusi nontrivial diperoleh ketika $x \neq 0$. Untuk $x \neq 0$, dari persamaan (4.5c) diperoleh $\mu = D$. Dan dari persamaan (4.5a), (4.5b), (4.5d), dan (4.5e)

$$\text{dihasilkan } \bar{S}_1 = \frac{1}{D} \left(-\rho \bar{x} + \frac{s_1^i f_1^i}{V} \right), \quad \bar{S}_2 = \frac{1}{D} \left(\left(-\frac{1}{Y_{x/s}} D - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi - k_m \right) \bar{x} + \frac{s_2^i f_2^i}{V} \right),$$

$$\bar{p} = \frac{1}{D} \left(-\pi + \frac{D}{Y_{x/p}} \right) \bar{x}, \quad \text{dan} \quad \bar{q} = \frac{1}{D} \left(-\rho + \frac{D}{Y_{x/q}} \right) \bar{x}. \quad \text{Sehingga diperoleh titik}$$

kesetimbangan yang kedua adalah $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$.

4.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Linierisasi dari sistem nonlinear dapat diperoleh dengan menghitung matriks Jacobi dari sistem tersebut. Matriks Jacobi dari sistem (4.1a)-(4.1e) dinyatakan oleh persamaan (4.6) berikut ini.

$$J(S_1, S_2, x, p, q) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 & a_5 \\ 0 & a_6 & a_7 & 0 & a_8 \\ 0 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & a_{16} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

dengan

$$a_1 = -\rho_{\max} \frac{K_{S_1}}{(K_{S_1} + S_1)^2} x - D,$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1}, \\
a_3 &= \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|s}} \frac{q}{(K_q + q)(K_{S_2} + S_2)} x - \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|s}} \frac{q}{(K_q + q)(K_{S_2} + S_2)^2} x + \frac{\pi_{\max}}{Y_{p|s}} \frac{1}{(K_{S_2} + S_2)} x \\
&\quad - \frac{\pi_{\max}}{Y_{p|s}} \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)^2} x - D, \\
a_4 &= -\frac{\mu_{\max}}{Y_{x|s}} \frac{q}{(K_q + q)(K_{S_2} + S_2)} - \frac{\pi_{\max}}{Y_{p|s}} \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)} - k_m, \\
a_5 &= -\frac{\mu_{\max}}{Y_{x|s}} \frac{1}{(K_q + q)(K_{S_2} + S_2)} x + \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|s}} \frac{q}{(K_q + q)^2 (K_{S_2} + S_2)} x, \\
a_6 &= \mu_{\max} \frac{q}{(K_q + q)} \left(\frac{1}{(K_{S_2} + S_2)} - \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)^2} \right), \\
a_7 &= \mu_{\max} \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)(K_q + q)} - D, \\
a_8 &= \mu_{\max} \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)} \left(\frac{1}{(K_q + q)} - \frac{q}{(K_q + q)^2} \right) x, \\
a_9 &= \left(\pi_{\max} - \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|p}} \frac{q}{(K_q + q)} \right) \left(\frac{1}{(K_{S_2} + S_2)} - \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)^2} \right) x, \\
a_{10} &= \pi_{\max} \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)} - \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|p}} \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)(K_q + q)}, \\
a_{11} &= -D, \\
a_{12} &= -\frac{\mu_{\max}}{Y_{x|p}} \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)} \left(\frac{1}{(K_q + q)} - \frac{q}{(K_q + q)^2} \right) x, \\
a_{13} &= \rho_{\max} \left(\frac{1}{(K_{S_1} + S_1)} - \frac{S_1}{(K_{S_1} + S_1)^2} \right) x, \\
a_{14} &= -\frac{\mu_{\max}}{Y_{x|q}} \frac{q}{(K_q + q)} \left(\frac{1}{(K_{S_2} + S_2)} - \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)^2} \right) x,
\end{aligned}$$

$$a_{15} = \rho_{\max} \left(\frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} \right) - \frac{\mu_{\max}}{Y_{x/q}} \left(\frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \right) \left(\frac{q}{K_q + q} \right),$$

$$a_{16} = -\frac{\mu_{\max}}{Y_{x/q}} \left(\frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \right) \left(\frac{1}{K_q + q} - \frac{q}{(K_q + q)^2} \right) x - D.$$

4.3.1 Kestabilan Titik Keseimbangan Trivial

Substitusi titik keseimbangan trivial ke dalam Matriks Jacobi (4.6) menghasilkan linierisasi di sekitar titik keseimbangan tersebut. Sehingga diperoleh matriks koefisien dari linierisasi sistem (4.1a)-(4.1e) di sekitar titik keseimbangan trivial yang dinyatakan oleh persamaan (4.7).

$$A = \begin{bmatrix} -D & 0 & -\rho_{\max} & 0 & 0 \\ 0 & -D & -\frac{1}{Y_{x/s}} \mu_{\max} - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi_{\max} - k_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\max} - D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\max} - \frac{1}{Y_{x/p}} \mu_{\max} & -D & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{\max} - \frac{1}{Y_{x/q}} \mu_{\max} & 0 & -D \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Nilai eigen diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|A - \lambda I| = 0$.

Dengan melakukan ekspansi kofaktor, diketahui

$$|A - \lambda I| = (-D - \lambda)^4 (\mu_{\max} - D - \lambda) = 0. \quad \text{Sehingga diperoleh nilai eigen}$$

$\lambda_{1,2,3,4} = -D$ atau $\lambda_5 = \mu_{\max} - D$. Dengan demikian, titik keseimbangan bersifat stabil asimtotik jika $\mu_{\max} < D$. Dengan kata lain, titik keseimbangan bersifat stabil asimtotik jika laju pengenceran lebih besar dari pada laju pertumbuhan maksimal mikroalga. Kondisi ini menggambarkan bahwa jika laju pengenceran lebih besar daripada laju pertumbuhan maksimal mikroalga, maka konsentrasi produk dari budidaya, yaitu biomassa, lipid, dan nitrogen menuju nilai nol.

4.3.2 Kestabilan Titik Keseimbangan Nontrivial

Substitusi titik keseimbangan nontrivial $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$ ke dalam matriks Jacobi (4.6) menghasilkan matriks (4.8).

$$J(\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q}) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_4 & 0 & b_5 \\ 0 & b_6 & b_7 & 0 & b_8 \\ 0 & b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} & b_{15} & 0 & b_{16} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Dengan

$$\begin{aligned} b_1 &= -\rho_{\max} \frac{K_{S_1}}{(K_{S_1} + \bar{S}_1)^2} \bar{x} - D, \quad b_2 = -\rho_{\max} \frac{\bar{S}_1}{K_{S_1} + \bar{S}_1}, \\ b_3 &= \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|s}} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \bar{x} - \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|s}} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})(K_{S_2} + \bar{S}_2)^2} \bar{S}_2 \bar{x} + \frac{\pi_{\max}}{Y_{p|s}} \frac{1}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \bar{x} \\ &\quad - \frac{\pi_{\max}}{Y_{p|s}} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)^2} \bar{x} - D, \\ b_4 &= \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|s}} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})(K_{S_2} + \bar{S}_2)} - \frac{\pi_{\max}}{Y_{p|s}} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} - k_m, \\ b_5 &= -\frac{\mu_{\max}}{Y_{x|s}} \frac{1}{(K_q + \bar{q})(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \bar{S}_2 \bar{x} + \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|s}} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})^2} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \bar{x}, \\ b_6 &= \mu_{\max} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})} \left(\frac{1}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} - \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)^2} \right), \\ b_7 &= \mu_{\max} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})} - D, \\ b_8 &= \mu_{\max} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \left(\frac{1}{(K_q + \bar{q})} - \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})^2} \right) \bar{x}, \\ b_9 &= \left(\pi_{\max} - \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|p}} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})} \right) \left(\frac{1}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} - \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)^2} \right) \bar{x}, \\ b_{10} &= \pi_{\max} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} - \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|p}} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})}, \quad b_{11} = -D, \\ b_{12} &= -\frac{\mu_{\max}}{Y_{x|p}} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \left(\frac{1}{(K_q + \bar{q})} - \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})^2} \right) \bar{x}, \end{aligned}$$

$$b_{13} = \rho_{\max} \left(\frac{1}{(K_{S_1} + \bar{S}_1)} - \frac{\bar{S}_1}{(K_{S_1} + \bar{S}_1)^2} \right) \bar{x},$$

$$b_{14} = -\frac{\mu_{\max}}{Y_{x|q}} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})} \left(\frac{1}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} - \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)^2} \right) \bar{x},$$

$$b_{15} = \rho_{\max} \frac{\bar{S}_1}{(K_{S_1} + \bar{S}_1)} - \frac{\mu_{\max}}{Y_{x|q}} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})},$$

$$b_{16} = -\frac{\mu_{\max}}{Y_{x|q}} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \left(\frac{1}{(K_q + \bar{q})} - \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})^2} \right) \bar{x} - D.$$

Dengan menyelesaikan persamaan $|J - \lambda I| = 0$, dapat diperoleh persamaan karakteristik untuk mengetahui nilai eigen pada titik kesetimbangan $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$. Dengan menggunakan ekspansi kofaktor pada persamaan $|J - \lambda I| = 0$, diperoleh persamaan karakteristik (4.9).

$$\begin{vmatrix} b_1 - \lambda & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 - \lambda & b_4 & 0 & b_5 \\ 0 & b_6 & b_7 - \lambda & 0 & b_8 \\ 0 & b_9 & b_{10} & b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} & b_{15} & 0 & b_{16} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(b_1 - \lambda) \begin{vmatrix} b_3 - \lambda & b_4 & 0 & b_5 \\ b_6 & b_7 - \lambda & 0 & b_8 \\ b_9 & b_{10} & b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{14} & b_{15} & 0 & b_{16} - \lambda \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} 0 & b_3 - \lambda & 0 & b_5 \\ 0 & b_6 & 0 & b_8 \\ 0 & b_9 & b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} & 0 & b_{16} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_1 - \lambda)(b_3 - \lambda) \begin{vmatrix} b_7 - \lambda & 0 & b_8 \\ b_{10} & b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{15} & 0 & b_{16} - \lambda \end{vmatrix} - b_4(b_1 - \lambda) \begin{vmatrix} b_6 & 0 & b_8 \\ b_9 & b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{14} & 0 & b_{16} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$- b_5(b_1 - \lambda) \begin{vmatrix} b_6 & b_7 - \lambda & 0 \\ b_9 & b_{10} & b_{11} - \lambda \\ b_{14} & b_{15} & 0 \end{vmatrix} - b_2(b_3 - \lambda) \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_8 \\ 0 & b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{13} & 0 & b_{16} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$- b_2 b_5 \begin{vmatrix} 0 & b_6 & 0 \\ 0 & b_9 & b_{11} - \lambda \\ b_{13} & b_{14} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_{11} - \lambda) \{ (b_1 - \lambda)(b_3 - \lambda) [(b_7 - \lambda)(b_{16} - \lambda) - b_8 b_{15}] - b_4(b_1 - \lambda)[b_6(b_{16} - \lambda) - b_8 b_{14}] - b_5(b_1 - \lambda)[b_{14}(b_7 - \lambda) - b_6 b_{15}] - b_5(b_1 - \lambda)[b_{14}(b_7 - \lambda) - b_6 b_{15}] + b_2 b_8 b_{13}(b_3 - \lambda) - b_2 b_5 b_6 b_{13} \} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_{11} - \lambda) \{ \lambda^4 + \lambda^3(-b_7 - b_{16} - b_1 - b_3) + \lambda^2(b_7 b_{16} + b_1 b_7 + b_3 b_7 + b_1 b_{16} + b_3 b_{16} + b_1 b_3 - b_8 b_{15} - b_4 b_6 - b_5 b_{14}) + \lambda(-b_1 b_7 b_{16} - b_3 b_7 b_{16} - b_1 b_3 b_7 - b_1 b_3 b_{16} + b_1 b_8 b_{15} + b_3 b_8 b_{15} + b_4 b_6 b_{16} + b_1 b_4 b_6 - b_4 b_8 b_{14} + b_5 b_7 b_{14} + b_1 b_5 b_{14} - b_5 b_6 b_{15} - b_2 b_8 b_{13}) + b_1 b_3 b_7 b_{16} - b_1 b_3 b_8 b_{15} - b_1 b_4 b_6 b_{16} + b_1 b_4 b_8 b_{14} - b_1 b_5 b_7 b_{14} + b_1 b_5 b_6 b_{15} + b_2 b_3 b_8 b_{13} - b_2 b_5 b_6 b_{13} \} = 0 \quad (4.9)$$

Dari persamaan (4.9) diketahui bahwa $\lambda_1 = b_{11} = -D$, sedangkan empat nilai eigen lainnya diperoleh dari persamaan

$$c_4 \lambda^4 + c_3 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0 \quad (4.10)$$

dengan

$$c_4 = 1,$$

$$c_3 = -b_7 - b_{16} - b_1 - b_3,$$

$$c_2 = b_7 b_{16} + b_1 b_7 + b_3 b_7 + b_1 b_{16} + b_3 b_{16} + b_1 b_3 - b_8 b_{15} - b_4 b_6 - b_5 b_{14},$$

$$c_1 = -b_1 b_7 b_{16} - b_3 b_7 b_{16} - b_1 b_3 b_7 - b_1 b_3 b_{16} + b_1 b_8 b_{15} + b_3 b_8 b_{15} + b_4 b_6 b_{16} + b_1 b_4 b_6 - b_4 b_8 b_{14} + b_5 b_7 b_{14} + b_1 b_5 b_{14} - b_5 b_6 b_{15} - b_2 b_8 b_{13},$$

dan

$$c_0 = b_1 b_3 b_7 b_{16} - b_1 b_3 b_8 b_{15} - b_1 b_4 b_6 b_{16} + b_1 b_4 b_8 b_{14} - b_1 b_5 b_7 b_{14} + b_1 b_5 b_6 b_{15} + b_2 b_3 b_8 b_{13} - b_2 b_5 b_6 b_{13}.$$

Nilai-nilai eigen dari persamaan (4.10) relatif sulit untuk diperoleh. Oleh karena itu, untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan nontrivial digunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Dari persamaan karakteristik (4.10), dibentuk tabel berikut ini.

λ^4	c_4	c_2	c_0
λ^3	c_3	c_1	
λ^2	d_1	d_2	
λ^1	e_1		
λ^0	f_1		

Dengan $d_1 = \frac{c_3 c_2 - c_4 c_1}{c_3}$, $d_2 = \frac{c_3 c_0 - c_4 \cdot 0}{c_3} = c_0$, $e_1 = \frac{d_1 c_1 - c_3 d_2}{d_1}$, dan

$$f_1 = \frac{e_1 d_2 - d_1 \cdot 0}{e_1} = d_2 = c_0.$$

Titik kesetimbangan nontrivial $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$ bersifat stabil jika tidak terdapat perubahan tanda pada kolom pertama tabel tersebut. Dengan kata lain, titik kesetimbangan $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$ bersifat stabil jika $c_3 > 0$, $d_1 > 0$, $e_1 > 0$, dan $f_1 = c_0 > 0$.

Salah satu syarat agar titik kesetimbangan $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$ bersifat stabil adalah $c_3 = -b_7 - b_{16} - b_1 - b_3 > 0$. Dengan menghitung nilai $c_3 = -b_7 - b_{16} - b_1 - b_3$, diperoleh

$$\begin{aligned} c_3 &= -\mu_{\max} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)(K_q + \bar{q})} + D + \frac{\mu_{\max}}{Y_{x/q}} \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} \left(\frac{1}{(K_q + \bar{q})} - \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})^2} \right) \bar{x} \\ &\quad + D + \rho_{\max} \frac{K_{S_1}}{(K_{S_1} + \bar{S}_1)^2} \bar{x} + D - \frac{\mu_{\max}}{Y_{x/s}} \frac{\bar{q}}{(K_q + \bar{q})} \left(\frac{1}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} - \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)^2} \right) \bar{x} \\ &\quad - \frac{\pi_{\max}}{Y_{p/s}} \left(\frac{1}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)} - \frac{\bar{S}_2}{(K_{S_2} + \bar{S}_2)^2} \right) \bar{x} + D \\ &= -\mu + D - \frac{1}{Y_{x/q}} \mu \bar{x} \left(\frac{1}{K_q + \bar{q}} - \frac{1}{\bar{q}} \right) + D + \rho \bar{x} \left(\frac{1}{\bar{S}_1} - \frac{1}{K_{S_1} + \bar{S}_1} \right) + D \\ &\quad - \frac{1}{Y_{x/s}} \mu \bar{x} \left(\frac{1}{\bar{S}_2} - \frac{1}{K_{S_2} + \bar{S}_2} \right) - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi \bar{x} \left(\frac{1}{\bar{S}_2} - \frac{1}{K_{S_2} + \bar{S}_2} \right) + D. \end{aligned}$$

Nilai μ menggambarkan laju pertumbuhan mikroalga. Nilai $\frac{1}{Y_{x/q}} \mu \bar{x} \left(\frac{1}{K_q + \bar{q}} - \frac{1}{\bar{q}} \right)$ berkaitan dengan laju penggunaan nitrogen untuk memproduksi biomassa. Nilai $\rho \bar{x} \left(\frac{1}{\bar{S}_1} - \frac{1}{K_{S_1} + \bar{S}_1} \right)$ berkaitan dengan laju *glycine*

yang diserap oleh mikroalga. Sedangkan nilai $\frac{1}{Y_{x/s}} \mu \bar{x} \left(\frac{1}{\bar{S}_2} - \frac{1}{K_{S_2} + \bar{S}_2} \right)$ berkaitan dengan laju penggunaan glukosa untuk memproduksi biomassa, dan $\frac{1}{Y_{p/s}} \pi \bar{x} \left(\frac{1}{\bar{S}_2} - \frac{1}{K_{S_2} + \bar{S}_2} \right)$ berkaitan dengan laju penggunaan glukosa untuk memproduksi lipid. Atau dapat dikatakan, nilai $\left(\frac{1}{Y_{x/s}} \mu + \frac{1}{Y_{p/s}} \pi \right) \bar{x} \left(\frac{1}{\bar{S}_2} - \frac{1}{K_{S_2} + \bar{S}_2} \right)$ berkaitan dengan laju glukosa yang diserap oleh mikroalga.

Agar c_3 bernilai positif, maka haruslah $D > \mu$, $D > \frac{1}{Y_{x/q}} \mu \bar{x} \left(\frac{1}{K_q + \bar{q}} - \frac{1}{\bar{q}} \right)$, $D > \rho \bar{x} \left(\frac{1}{K_{S_1} + \bar{S}_1} - \frac{1}{\bar{S}_1} \right)$, dan $D > \left(\frac{1}{Y_{x/s}} \mu + \frac{1}{Y_{p/s}} \pi \right) \bar{x} \left(\frac{1}{\bar{S}_2} - \frac{1}{K_{S_2} + \bar{S}_2} \right)$. Dengan kata lain, syarat $c_3 > 0$ terpenuhi jika laju pengenceran lebih besar dari pada laju pertumbuhan mikroalga, laju pengenceran lebih besar daripada laju penggunaan nitrogen untuk memproduksi biomassa, laju pengenceran lebih besar dari laju *glycine* yang diserap oleh mikroalga, dan laju pengenceran lebih besar dari laju glukosa yang diserap oleh mikroalga. Dengan catatan $\frac{1}{K_q + \bar{q}} - \frac{1}{\bar{q}} > 0$,

$\frac{1}{K_{S_1} + \bar{S}_1} - \frac{1}{\bar{S}_1} > 0$, dan $\frac{1}{\bar{S}_2} - \frac{1}{K_{S_2} + \bar{S}_2} > 0$. Dari $\frac{1}{K_q + \bar{q}} - \frac{1}{\bar{q}} > 0$ diperoleh $K_q < 0$. Dari $\frac{1}{K_{S_1} + \bar{S}_1} - \frac{1}{\bar{S}_1} > 0$ diperoleh $K_{S_1} < 0$. Dan dari $\frac{1}{\bar{S}_2} - \frac{1}{K_{S_2} + \bar{S}_2} > 0$ diperoleh $K_{S_2} > 0$. Dengan demikian diperoleh syarat $c_3 > 0$ terpenuhi adalah $K_q < 0$, $K_{S_1} < 0$ dan $K_{S_2} > 0$.

Syarat $K_q < 0$ dan $K_{S_1} < 0$ tidak akan terpenuhi karena nilai konstanta setengah jenuh nitrogen dan *glycine* selalu bernilai positif. Oleh karena syarat $K_q < 0$ dan $K_{S_1} < 0$ tidak terpenuhi, maka $c_3 > 0$ juga tidak terpenuhi. Tidak terpenuhinya $c_3 > 0$, menunjukkan bahwa terdapat perubahan tanda pada kolom

pertama tabel kriteria Routh-Hurwitz. Sehingga dapat diketahui bahwa titik kesetimbangan $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$ bersifat tak stabil. Ketidakstabilan titik kesetimbangan $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$ menunjukkan bahwa berapapun laju pemberian makanan yang diberikan kepada mikroalga, solusi dari sistem tidak akan menuju ke titik $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$.

4.4 Masalah Kendali Optimal

Pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor sangat dipengaruhi oleh substrat yang dimasukkan ke dalamnya. Besar substrat yang dimasukkan ke dalam bioreaktor bergantung pada laju pemberian makanan, yaitu laju pemberian makanan berupa *glycine* (f_1^i), dan laju pemberian makanan berupa glukosa (f_2^i). Laju pemberian makanan yang terlalu kecil dapat menyebabkan mikroalga tidak berkembang dengan baik. Sedangkan laju pemberian makanan yang terlalu besar dapat meracuni dan mematikan sel mikroalga. Dengan demikian, perlu diketahui laju pemberian makanan yang tepat untuk menghasilkan pertumbuhan mikroalga yang diinginkan. Laju pemberian makanan yang tepat dapat diketahui dengan menyelesaikan masalah kendali optimal. Pada tahap ini dilakukan formulasi masalah kendali optimal pada model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor.

4.4.1 Model Pertumbuhan Mikroalga dengan Kendali

Kendali dari model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor adalah laju pemberian makanan berupa *glycine* (f_1^i), dan laju pemberian makanan berupa glukosa (f_2^i). Dengan demikian f_1^i dapat dinyatakan sebagai variabel kendali u_1 , yang menyatakan laju pemberian makanan berupa *glycine*, sedangkan f_2^i dapat dinyatakan sebagai variabel kendali u_2 , yang menyatakan laju pemberian makanan berupa glukosa. Mengacu pada sistem dinamik (4.1a)-(4.1e), model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch* dengan mempertimbangkan laju pemberian makanan sebagai variabel kendali dinyatakan oleh sistem dinamik (4.11a)-(4.11e) berikut ini.

$$\frac{dS_1}{dt} = -\rho x + s_1^i \frac{u_1}{V} - S_1 \frac{u_1 + u_2}{V}, \quad (4.11a)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\frac{1}{Y_{x/s}} \mu x - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi x - k_m x + s_2^i \frac{u_2}{V} - S_2 \frac{u_1 + u_2}{V}, \quad (4.11b)$$

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x \frac{u_1 + u_2}{V}, \quad (4.11c)$$

$$\frac{dp}{dt} = \pi x - \frac{1}{Y_{x/p}} \mu x - p \frac{u_1 + u_2}{V}, \quad (4.11d)$$

$$\frac{dq}{dt} = \rho x - \frac{1}{Y_{x/q}} \mu x - q \frac{u_1 + u_2}{V}. \quad (4.11e)$$

Dengan kendala dari variabel-variabel kendalinya adalah $0 \leq u_1 \leq 2$, dan $0 \leq u_2 \leq 10$.

4.4.2 Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan dari masalah kendali optimal dalam penelitian ini bertujuan untuk meminimumkan biaya pemberian makanan dan memaksimalkan hasil budidaya mikroalga, yaitu biomassa dan lipid. Secara matematis, fungsi tujuan tersebut dapat dinyatakan sebagai persamaan (4.12).

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{C_1}{2} u_1^2 + \frac{C_2}{2} u_2^2 - x - p \right) dt \quad (4.12)$$

dengan C_1 adalah bobot biaya pemberian makanan berupa *glycine* dan C_2 adalah bobot biaya pemberian makanan berupa glukosa.

4.4.3 Penyelesaian Masalah Kendali Optimal dengan Prinsip Minimum Pontryagin

Langkah-langkah yang dilakukan untuk mengetahui kendali optimal dari sistem (4.11a)-(4.11e) dengan fungsi tujuan (4.12) adalah sebagai berikut:

1. Bentuk fungsi Hamiltonian

$$H = -x - p + \frac{C_1}{2} u_1^2 + \frac{C_2}{2} u_2^2 + \lambda_1 \left(-\rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} x + s_1^i \frac{u_1}{V} - S_1 \frac{u_1 + u_2}{V} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_2 \left(-\frac{1}{Y_{x/s}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x \right. \\
& \quad \left. - k_m x + s_2^i \frac{u_2}{V} - S_2 \frac{u_1 + u_2}{V} \right) \\
& + \lambda_3 \left(\mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x - x \frac{u_1 + u_2}{V} \right) \\
& + \lambda_4 \left(\pi_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x - \frac{1}{Y_{x/p}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x - p \frac{u_1 + u_2}{V} \right) \\
& + \lambda_5 \left(\rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} x - \frac{1}{Y_{x/q}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x - q \frac{u_1 + u_2}{V} \right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

2. Kendali optimal

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 & \rightarrow C_1 u_1^* + \frac{\lambda_1 s_1^i}{V} - \frac{\lambda_1 S_1}{V} - \frac{\lambda_2 S_2}{V} - \frac{\lambda_3 x}{V} - \frac{\lambda_4 p}{V} - \frac{\lambda_5 q}{V} = 0 \\
u_1^* & = \frac{1}{C_1 V} \left(-\lambda_1 s_1^i + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 x + \lambda_4 p + \lambda_5 q \right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 & \rightarrow C_2 u_2^* + \frac{\lambda_2 s_2^i}{V} - \frac{\lambda_1 S_1}{V} - \frac{\lambda_2 S_2}{V} - \frac{\lambda_3 x}{V} - \frac{\lambda_4 p}{V} - \frac{\lambda_5 q}{V} = 0 \\
u_2^* & = \frac{1}{C_2 V} \left(-\lambda_2 s_2^i + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 x + \lambda_4 p + \lambda_5 q \right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

3. Substitusi kendali optimal ke dalam fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned}
H^* & = -x - p - \lambda_1 \left(\rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} x \right) \\
& + \lambda_2 \left(-\frac{1}{Y_{x/s}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x - k_m x \right) \\
& + \lambda_3 \left(\mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x \right) \\
& + \lambda_4 \left(\pi_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x - \frac{1}{Y_{x/p}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_5 \left(\rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} x - \frac{1}{Y_{x/q}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x \right) \\
& - \frac{\lambda_1^2 s_1^2}{2C_1 V^2} - \frac{\lambda_1^2 S_1^2}{2C_1 V^2} - \frac{\lambda_2^2 S_2^2}{2C_1 V^2} - \frac{\lambda_3^2 x^2}{2C_1 V^2} - \frac{\lambda_4^2 p^2}{2C_1 V^2} - \frac{\lambda_5^2 q^2}{2C_1 V^2} \\
& - \frac{\lambda_2^2 s_2^2}{2C_2 V^2} - \frac{\lambda_1^2 S_1^2}{2C_2 V^2} - \frac{\lambda_2^2 S_2^2}{2C_2 V^2} - \frac{\lambda_3^2 x^2}{2C_2 V^2} - \frac{\lambda_4^2 p^2}{2C_2 V^2} - \frac{\lambda_5^2 q^2}{2C_2 V^2} \\
& + \frac{\lambda_1 \lambda_2 s_1^i S_2}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1^2 S_1 s_1^i}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_3 s_1^i x}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_4 s_1^i p}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_5 s_1^i q}{C_1 V^2} \\
& + \frac{\lambda_1 \lambda_2 S_1 s_2^i}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2^2 S_2 s_2^i}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 s_2^i x}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_4 s_2^i p}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_5 s_2^i q}{C_2 V^2} \\
& - \frac{\lambda_1 \lambda_2 S_1 S_2}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 S_1 x}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 S_2 x}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_4 S_1 p}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_4 S_2 p}{C_1 V^2} \\
& - \frac{\lambda_3 \lambda_4 x p}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_5 S_1 q}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_5 S_2 q}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_3 \lambda_5 x q}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_4 \lambda_5 p q}{C_1 V^2} \\
& - \frac{\lambda_1 \lambda_2 S_1 S_2}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 S_1 x}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 S_2 x}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_4 S_1 p}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_4 S_2 p}{C_2 V^2} \\
& - \frac{\lambda_3 \lambda_4 x p}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_5 S_1 q}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_5 S_2 q}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_3 \lambda_5 x q}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_4 \lambda_5 p q}{C_2 V^2}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4. Persamaan diferensial *state* dan *costate*

$$\begin{aligned}
\dot{S}_1^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \\
&= -\rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} x - \frac{\lambda_1 s_1^2}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_1 S_1^2}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_1 S_1^2}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2 s_1^i S_2}{C_1 V^2} \\
&+ \frac{2\lambda_1 S_1 s_1^i}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_3 s_1^i x}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_4 s_1^i p}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_5 s_1^i q}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_2 S_1 s_2^i}{C_2 V^2} \\
&- \frac{\lambda_2 S_1 S_2}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_3 S_1 x}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_4 S_1 p}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_5 S_1 q}{C_1 V^2} \\
&- \frac{\lambda_2 S_1 S_2}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_3 S_1 x}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_4 S_1 p}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_5 S_1 q}{C_2 V^2}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\dot{S}_2^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \\
&= -\frac{1}{Y_{x/s}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x - k_m x
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda_2 S_2^2}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_2 s_2^{i^2}}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_2 S_2^2}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 s_1^i S_2}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 S_1 s_2^i}{C_2 V^2} + \frac{2\lambda_2 S_2 s_2^i}{C_2 V^2} \\
& + \frac{\lambda_3 s_2^i x}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_4 s_2^i p}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_5 s_2^i q}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 S_1 S_2}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_3 S_2 x}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_4 S_2 p}{C_1 V^2} \\
& - \frac{\lambda_5 S_2 q}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_1 S_1 S_2}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_3 S_2 x}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_4 S_2 p}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_5 S_2 q}{C_2 V^2} \\
\dot{x}^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} \\
&= \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x - \frac{\lambda_3 x^2}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_3 x^2}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 s_1^i x}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_2 s_2^i x}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 S_1 x}{C_1 V^2} \\
& - \frac{\lambda_2 S_2 x}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_4 x p}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_5 x q}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_1 S_1 x}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_2 S_2 x}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_4 x p}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_5 x q}{C_2 V^2}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} \\
&= \pi_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x - \frac{1}{Y_{x/p}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x \\
& - \frac{\lambda_4 p^2}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_4 p^2}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 s_1^i p}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_2 s_2^i p}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 S_1 p}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_2 S_2 p}{C_1 V^2} \\
& - \frac{\lambda_3 x p}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_5 p q}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_1 S_1 p}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_2 S_2 p}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_3 x p}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_5 p q}{C_2 V^2}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_5} \\
&= \rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} x - \frac{1}{Y_{x/q}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} x \\
& - \frac{\lambda_5 q^2}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_5 q^2}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 s_1^i q}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_2 s_2^i q}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 S_1 q}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_2 S_2 q}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_3 x q}{C_1 V^2} \\
& - \frac{\lambda_4 p q}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_1 S_1 q}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_2 S_2 q}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_3 x q}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_4 p q}{C_2 V^2}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1^* &= -\frac{\partial H}{\partial S_1} \\
&= (\lambda_1 \rho_{\max} x - \lambda_5 \rho_{\max} x) \left(\frac{1}{K_{S_1} + S_1} - \frac{S_1}{(K_{S_1} + S_1)^2} \right) + \frac{\lambda_1^2 S_1}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 S_2}{C_1 V^2}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_1 \lambda_3 x}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_4 p}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_5 q}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1^2 S_1}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 S_2}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_3 x}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_4 p}{C_2 V^2} \\
& + \frac{\lambda_1 \lambda_5 q}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1^2 s_1^i}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 s_2^i}{C_2 V^2} \\
\dot{\lambda}_2^* &= -\frac{\partial H}{\partial S_2} \\
&= \lambda_2 \left(\frac{1}{Y_{x/s}} \mu_{\max} \frac{q}{K_q + q} x - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi_{\max} \right) \left(\frac{1}{K_{S_2} + S_2} - \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)^2} \right) \\
& - \lambda_3 \left(\mu_{\max} \frac{q}{K_q + q} x \right) \left(\frac{1}{K_{S_2} + S_2} - \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)^2} \right) \\
& - \lambda_4 \left(\pi_{\max} x - \frac{1}{Y_{x/p}} \mu_{\max} \frac{q}{K_q + q} x \right) \left(\frac{1}{K_{S_2} + S_2} - \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)^2} \right) \quad (4.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_5 \left(\frac{1}{Y_{x/q}} \mu_{\max} \frac{q}{K_q + q} x \right) \left(\frac{1}{K_{S_2} + S_2} - \frac{S_2}{(K_{S_2} + S_2)^2} \right) \\
& + \frac{\lambda_2^2 S_2}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_2^2 S_2}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 s_1^i}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_2^2 s_2^i}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 S_1}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 x}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_4 p}{C_1 V^2} \\
& + \frac{\lambda_2 \lambda_5 q}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 S_1}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 x}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_4 p}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_5 q}{C_2 V^2} \\
\dot{\lambda}_3^* &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\
&= 1 + \lambda_1 \left(\rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} \right) \\
& - \lambda_2 \left(-\frac{1}{Y_{x/s}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} - \frac{1}{Y_{p/s}} \pi_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} - k_m \right) \\
& - \lambda_3 \left(\mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} \right) \quad (4.24) \\
& - \lambda_4 \left(\pi_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} - \frac{1}{Y_{x/p}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} \right) \\
& - \lambda_5 \left(\rho_{\max} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} - \frac{1}{Y_{x/q}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} \frac{q}{K_q + q} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_3^2 x}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_3^2 x}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 s_1^i}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 s_2^i}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_3 S_1}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 S_2}{C_2 V^2} \\
& + \frac{\lambda_3 \lambda_4 p}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_3 \lambda_5 q}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_3 S_1}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 S_2}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_3 \lambda_4 p}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_3 \lambda_5 q}{C_2 V^2} \\
\dot{\lambda}_4^* &= -\frac{\partial H}{\partial p} \\
&= 1 + \frac{\lambda_4^2 p}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_4^2 p}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_4 s_1^i}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_4 s_2^i}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_4 S_1}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_4 S_2}{C_2 V^2} \\
& + \frac{\lambda_3 \lambda_4 x}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_4 \lambda_5 q}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_4 S_1}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_4 S_2}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_3 \lambda_4 x}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_4 \lambda_5 q}{C_2 V^2}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_5^* &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\
&= \lambda_2 \left(\frac{1}{Y_{x/s}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x \left(\frac{1}{K_q + q} - \frac{q}{(K_q + q)^2} \right) \right) \\
& - \lambda_3 \left(\mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x \left(\frac{1}{K_q + q} - \frac{q}{(K_q + q)^2} \right) \right) \\
& + \lambda_4 \left(\frac{1}{Y_{x/p}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x \left(\frac{1}{K_q + q} - \frac{q}{(K_q + q)^2} \right) \right) \\
& + \lambda_5 \left(\frac{1}{Y_{x/q}} \mu_{\max} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2} x \left(\frac{1}{K_q + q} - \frac{q}{(K_q + q)^2} \right) \right) \\
& + \frac{\lambda_5^2 q}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_5^2 q}{C_2 V^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_5 s_1^i}{C_1 V^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_5 s_2^i}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_5 S_1}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_5 S_2}{C_2 V^2} \\
& + \frac{\lambda_3 \lambda_5 x}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_4 \lambda_5 p}{C_1 V^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_5 S_1}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_2 \lambda_5 S_2}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_3 \lambda_5 x}{C_2 V^2} + \frac{\lambda_4 \lambda_5 p}{C_2 V^2}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

dengan kondisi batas $S_1(0)=S_{10}$, $S_2(0)=S_{20}$, $x(0)=x_0$, $p(0)=p_0$, $q(0)=q_0$, waktu awal $t_0=0$, dan waktu akhir $t_f=150$. Masalah kendali optimal dalam penelitian ini merupakan sistem dengan *fixed final time* dan *free final state*, sehingga diperoleh kondisi *transversality* $\lambda_1(t_f)=0$, $\lambda_2(t_f)=0$, $\lambda_3(t_f)=0$, $\lambda_4(t_f)=0$, $\lambda_5(t_f)=0$.

Solusi dari sistem (4.17)-(4.26) merupakan *state* dan *costate* optimal, yang diperoleh dengan mengetahui persamaan (4.14) dan (4.15) sebagai kendali

optimal sistem. Solusi dari sistem (4.17)-(4.26) cukup sulit jika dilakukan secara analitik. Oleh karena itu sistem (4.17)-(4.26) diselesaikan secara numerik dengan menggunakan *toolbox* DOTcvpSB *software* MATLAB.

4.5 Simulasi Numerik

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik untuk model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor *fed-batch*. Simulasi numerik dilakukan untuk melihat perilaku solusi sistem terhadap waktu. Parameter yang digunakan tersaji pada Tabel 4.1 (Abdollahi & Dubljevic, 2012).

Tabel 4.1 Parameter pada Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch*

Parameter	Nilai	Unit
$Y_{x/s}$	0.55	-
$Y_{p/s}$	0.34	-
$Y_{x/q}$	56.67	-
$Y_{x/p}$	11.84	-
k_m	0.19	L/hari
μ_{\max}	14.18	L/hari
π_{\max}	0.50	L/hari
ρ_{\max}	0.93	L/hari
K_{S_1}	0.14	gr/L
K_{S_2}	8.45	gr/L
K_q	0.0041	gr/L
s_1^i	0.6	gr/L
s_2^i	40	gr/L
V	2.00	L

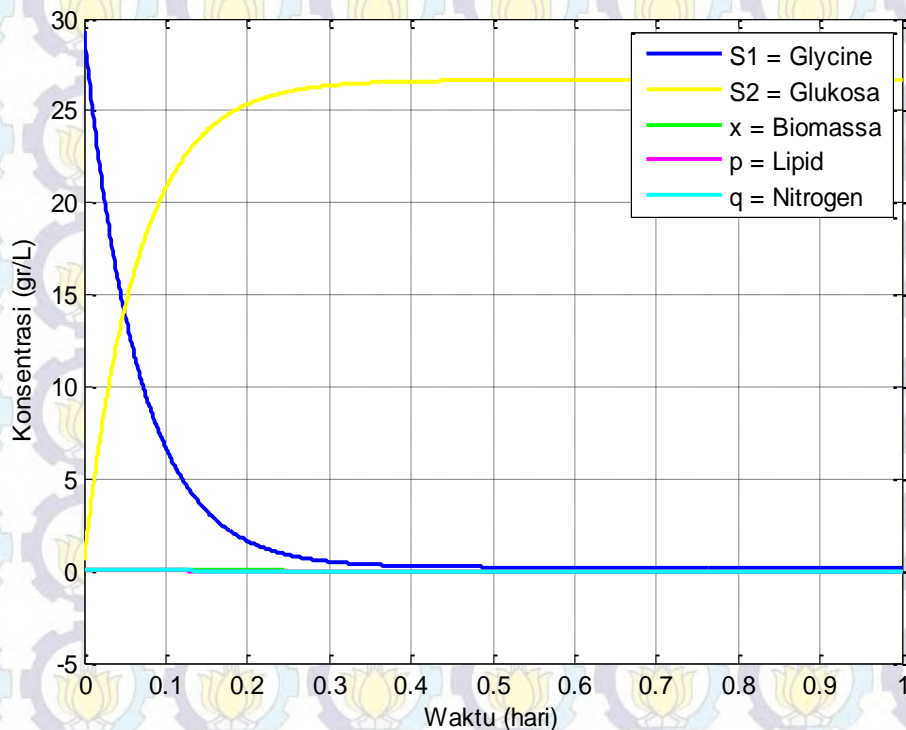
4.5.1 Simulasi Model Tanpa Kendali

Simulasi model tanpa kendali dilakukan dengan metode Runge-Kutta Orde

4. Untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan $E_1 = \left(\frac{s_1^i f_1^i}{VD}, \frac{s_2^i f_2^i}{VD}, 0, 0, 0 \right)$

digunakan syarat awal $S_1(0) = 29.3$, $S_2(0) = 0.57$, $x(0) = 0.1$, $p(0) = 0.1$, dan $q(0) = 0.1$. Dengan kata lain, konsentrasi awal *glycine* di dalam bioreaktor adalah sebesar 29.3 gr/L, konsentrasi awal glukosa di dalam bioreaktor adalah sebesar 0.57 gr/L, konsentrasi awal biomassa, lipid, dan nitrogen di dalam bioreaktor adalah sebesar 0.1 gr/L.

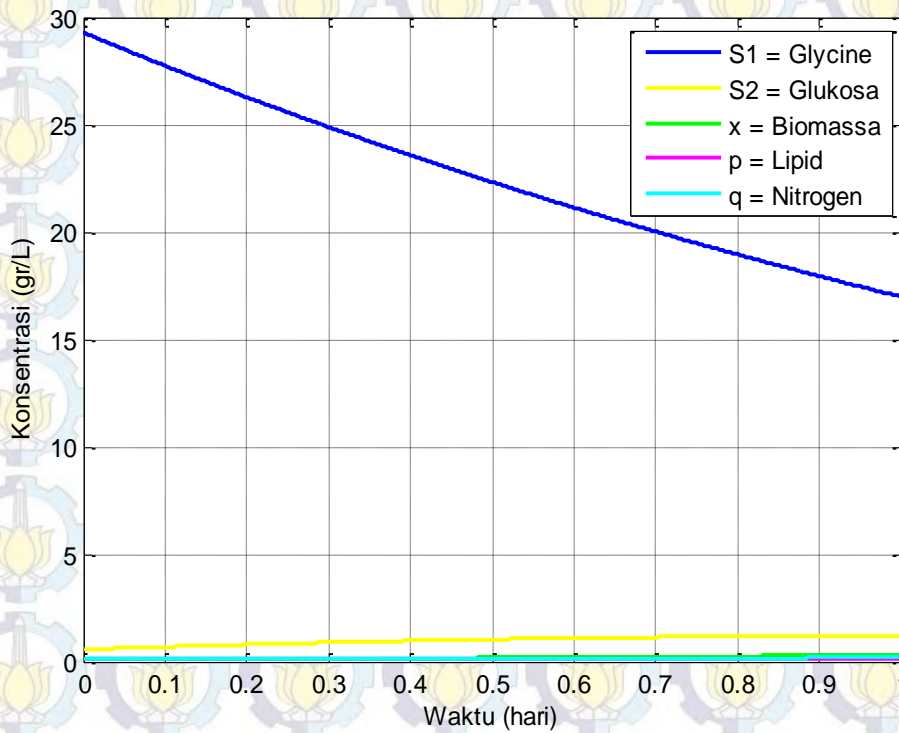
Dari analisis kestabilan, diketahui bahwa syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_1 = \left(\frac{s_1^i f_1^i}{VD}, \frac{s_2^i f_2^i}{VD}, 0, 0, 0 \right)$ adalah $\mu_{\max} < D$. Laju pengenceran (D) dipengaruhi oleh laju pemberian *glycine* (f_1^i) dan laju pemberian glukosa sebagai makanan (f_2^i).



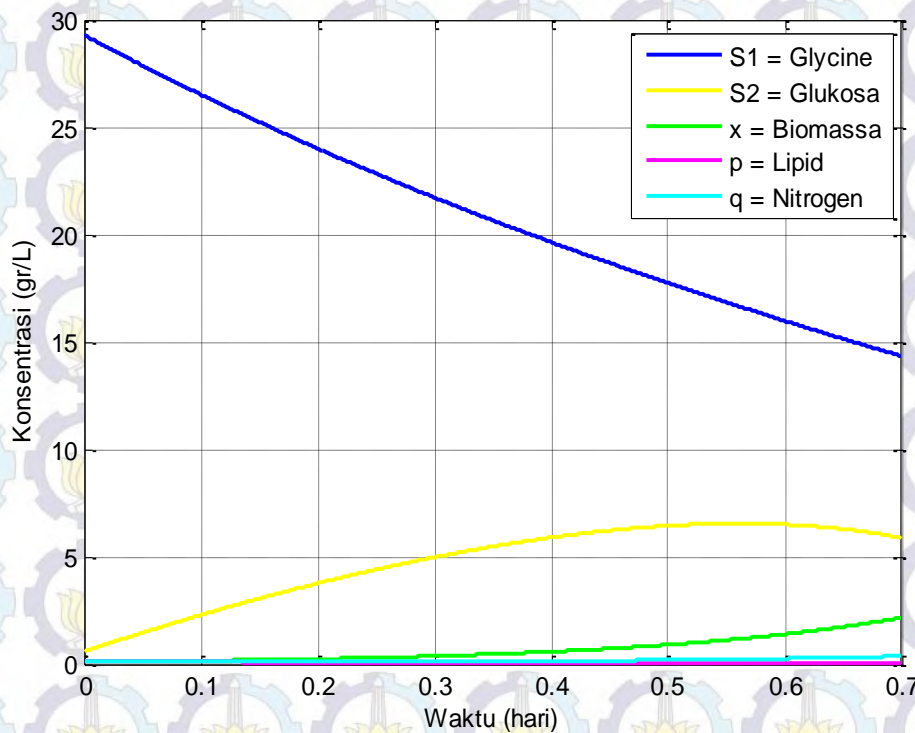
Gambar 4.1 Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch* di sekitar E_1 dengan $f_1^i = 10$ dan $f_2^i = 20$ ($\mu_{\max} < D$).

Gambar 4.1 diperoleh ketika syarat kestabilan titik kesetimbangan E_1 terpenuhi, yaitu $\mu_{\max} < D$. Terlihat bahwa konsentrasi biomassa, lipid, dan nitrogen menuju ke 0. Sedangkan konsentrasi *glycine* dan glukosa menuju ke arah $S_1 = \frac{s_1^i f_1^i}{VD} = 0.2000$, $S_2 = \frac{s_2^i f_2^i}{VD} = 26.6667$. Hal ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil dengan syarat $\mu_{\max} < D$.

Gambar 4.1 menggambarkan kondisi ketika laju pengenceran lebih besar dari laju pertumbuhan maksimal mikroalga dan konsentrasi biomassa dalam bioreaktor mendekati nol. Jika laju pengenceran lebih besar dari laju pertumbuhan maksimal mikroalga, sedangkan konsentrasi biomassa mendekati nol, maka sangat sedikit substrat yang terserap oleh mikroalga. Akibatnya, konsentrasi substrat yang ada dalam bioreaktor menjadi terlalu banyak. Konsentrasi substrat yang terlalu banyak dapat meracuni dan membunuh sel mikroalga. Sehingga seiring bertambahnya waktu, konsentrasi biomassa, lipid, dan nitrogen semakin menurun dan menuju nol.



Gambar 4.2 Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch* di sekitar E_1 dengan $f_1^i = 1$, $f_2^i = 0.1$ ($\mu_{\max} > D$).

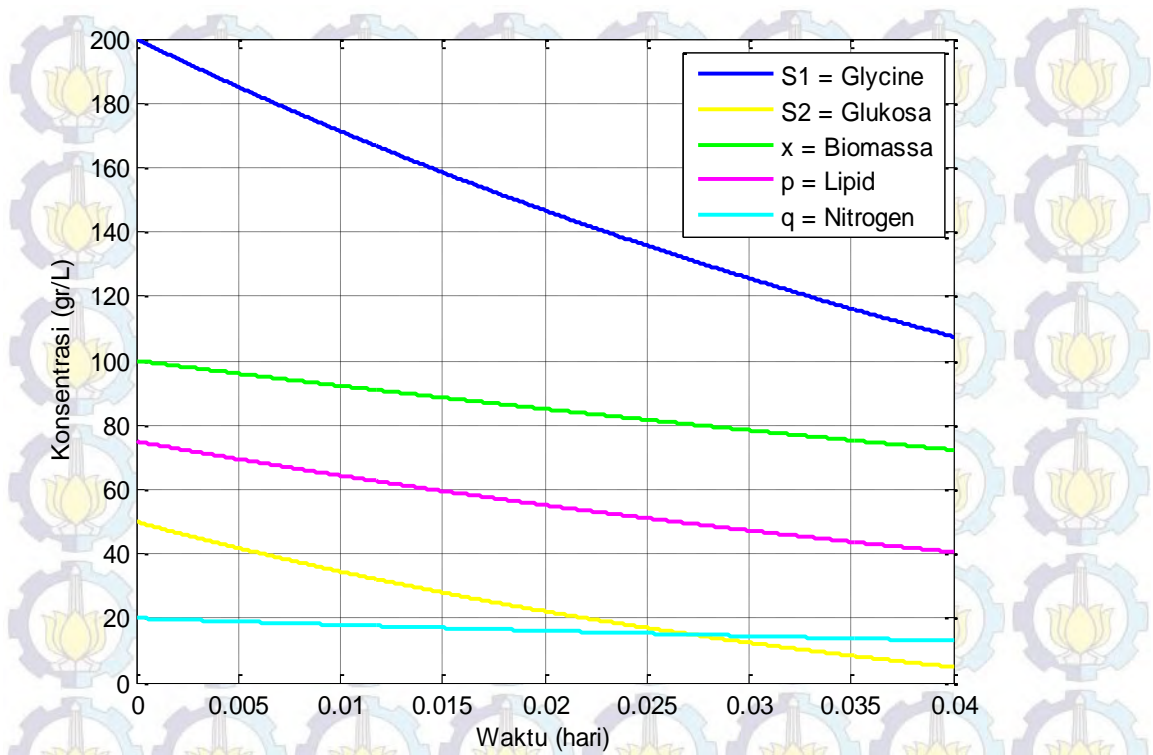


Gambar 4.3 Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch* di sekitar E_1 dengan $f_1^i = 1$, $f_2^i = 1$ ($\mu_{\max} > D$).

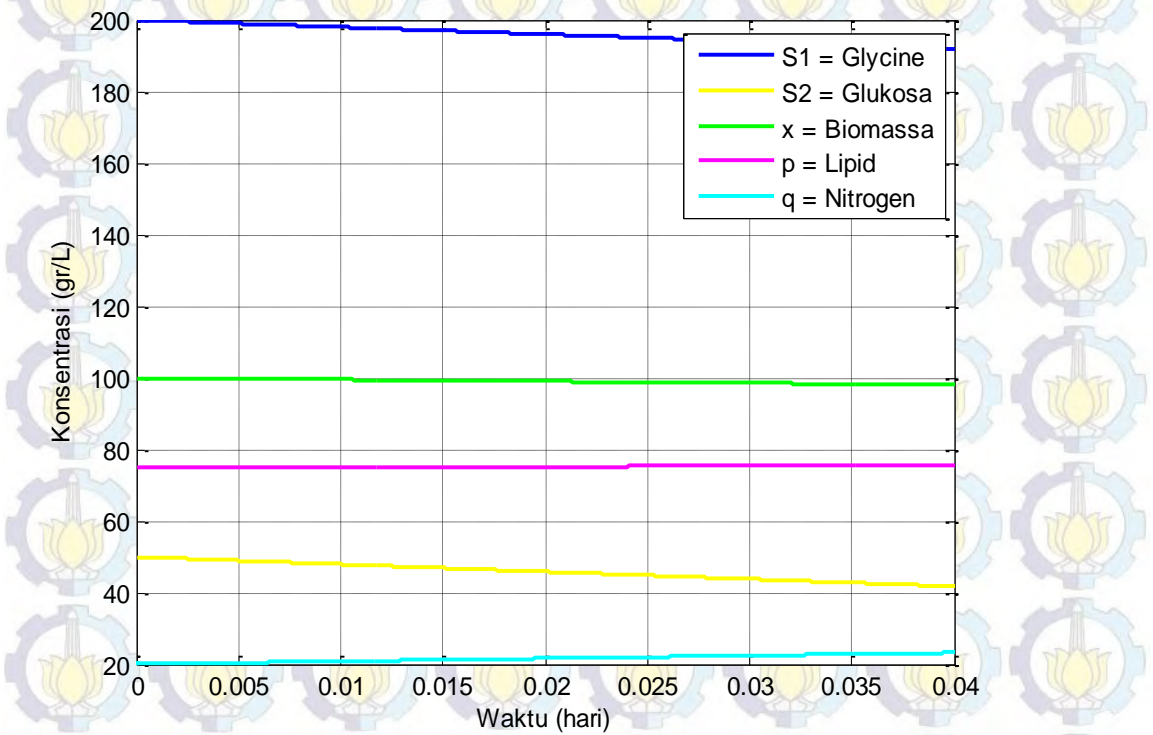
Gambar 4.2 dan Gambar 4.3 diperoleh jika dipilih nilai $\mu_{\max} > D$, yaitu

ketika syarat kestabilan $E_1 = \left(\frac{s_1^i f_1^i}{VD}, \frac{s_2^i f_2^i}{VD}, 0, 0, 0 \right)$ tidak terpenuhi. Dari Gambar

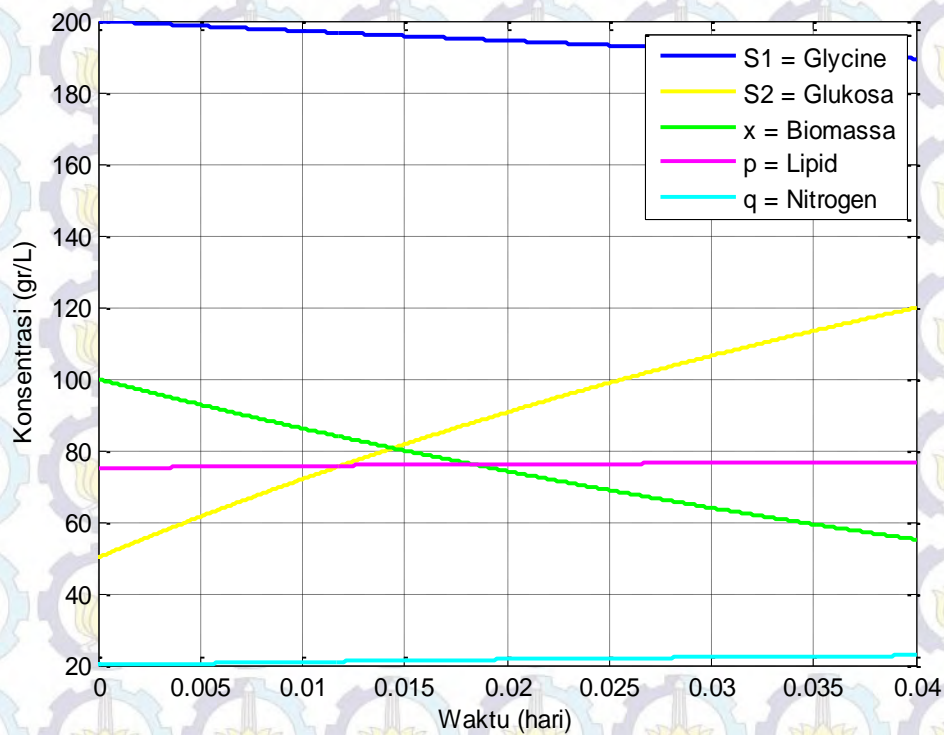
4.2, diketahui bahwa pada waktu $t=1$, konsentrasi *glycine* adalah sebesar 16.9936 gr/L, konsentrasi glukosa sebesar 1.1835 gr/L, konsentrasi biomassa sebesar 0.3206 gr/L, konsentrasi lipid sebesar 0.0956 gr/L, dan konsentrasi nitrogen sebesar 0.1944 gr/L. Sedangkan pada Gambar 4.3, diketahui bahwa pada waktu $t=1$, konsentrasi *glycine* adalah sebesar 14.3392 gr/L, konsentrasi glukosa sebesar 5.8764 gr/L, konsentrasi biomassa sebesar 2.1649 gr/L, konsentrasi lipid sebesar 0.0597 gr/L, dan konsentrasi nitrogen sebesar 0.3735 gr/L. Gambar 4.2 dan 4.3 menggambarkan kondisi ketika konsentrasi biomassa mendekati nol dan laju pertumbuhan maksimal mikroalga lebih besar daripada laju pengenceran. Kedua gambar tersebut merepresentasikan bahwa meskipun konsentrasi biomassa sangat kecil, mikroalga dapat tetap menghasilkan produk dengan syarat laju pertumbuhan maksimal mikroalga lebih besar daripada laju pengenceran.



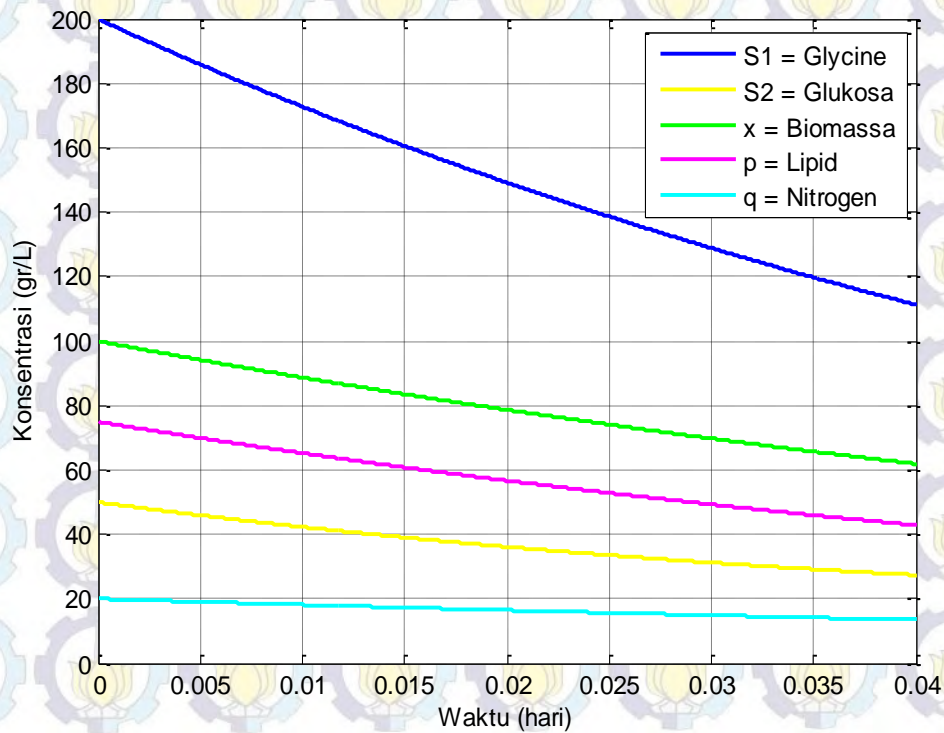
Gambar 4.4 Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch* di sekitar E_2 dengan $f_1^i = 10$, $f_2^i = 20$ ($\mu_{\max} > D$).



Gambar 4.5 Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch* di sekitar E_2 dengan $f_1^i = 1$, $f_2^i = 0.1$ ($\mu_{\max} > D$).



Gambar 4.6 Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch* di sekitar E_2 dengan $f_1^i = 1$, $f_2^i = 1$ ($\mu_{\max} > D$).



Gambar 4.7 Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch* di sekitar E_2 dengan $f_1^i = 10.18$ dan $f_2^i = 18.18$ ($\mu_{\max} = D$).

Titik kesetimbangan $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$ diperoleh ketika $x \neq 0$. Untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan E_2 , dipilih syarat awal $S_1(0) = 200$, $S_2(0) = 50$, $x(0) = 100$, $p(0) = 75$, dan $q(0) = 20$. Dengan kata lain, konsentrasi awal dari *glycine*, glukosa, biomassa, lipid, dan nitrogen dalam bioreaktor secara berurutan adalah sebesar 200 gr/L, 50 gr/L, 100 gr/L, 75 gr/L, dan 20 gr/L. Gambar 4.4 diperoleh jika dipilih nilai $\mu_{\max} < D$. Gambar 4.5 dan Gambar 4.6 diperoleh jika dipilih nilai $\mu_{\max} > D$. Sedangkan Gambar 4.7 diperoleh jika dipilih nilai $\mu_{\max} = D$. Dari Gambar 4.4-4.7 terlihat bahwa berapapun laju pengenceran yang dipilih, solusi numerik dari sistem tidak konvergen menuju titik tertentu.

Dari Gambar 4.4, diketahui bahwa pada $t = 0.04$, konsentrasi *glycine* adalah sebesar 107.5013 gr/L, konsentrasi glukosa sebesar 4.8338 gr/L, konsentrasi biomassa sebesar 72.3126 gr/L, konsentrasi lipid sebesar 40.5240 gr/L, dan konsentrasi nitrogen sebesar 13.0163 gr/L. Dari Gambar 4.5, diketahui bahwa pada $t = 0.04$, konsentrasi *glycine* adalah sebesar 192.0200 gr/L, konsentrasi glukosa sebesar 41.7525 gr/L, konsentrasi biomassa sebesar 98.0369 gr/L, konsentrasi lipid sebesar 72.4265 gr/L, dan konsentrasi nitrogen sebesar 32.2009 gr/L. Dari Gambar 4.6, diketahui bahwa pada $t = 0.04$, konsentrasi *glycine* adalah sebesar 189.4292 gr/L, konsentrasi glukosa sebesar 119.7440 gr/L, konsentrasi biomassa sebesar 55.1291 gr/L, konsentrasi lipid sebesar 76.5288 gr/L, dan konsentrasi nitrogen sebesar 22.6788 gr/L. Sedangkan dari Gambar 4.7, diketahui bahwa pada $t = 0.04$, konsentrasi *glycine* adalah sebesar 111.3107 gr/L, konsentrasi glukosa sebesar 27.3565 gr/L, konsentrasi biomassa sebesar 61.8783 gr/L, konsentrasi lipid sebesar 42.8609 gr/L, dan konsentrasi nitrogen sebesar 13.4525 gr/L. Hal ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$ bersifat tak stabil.

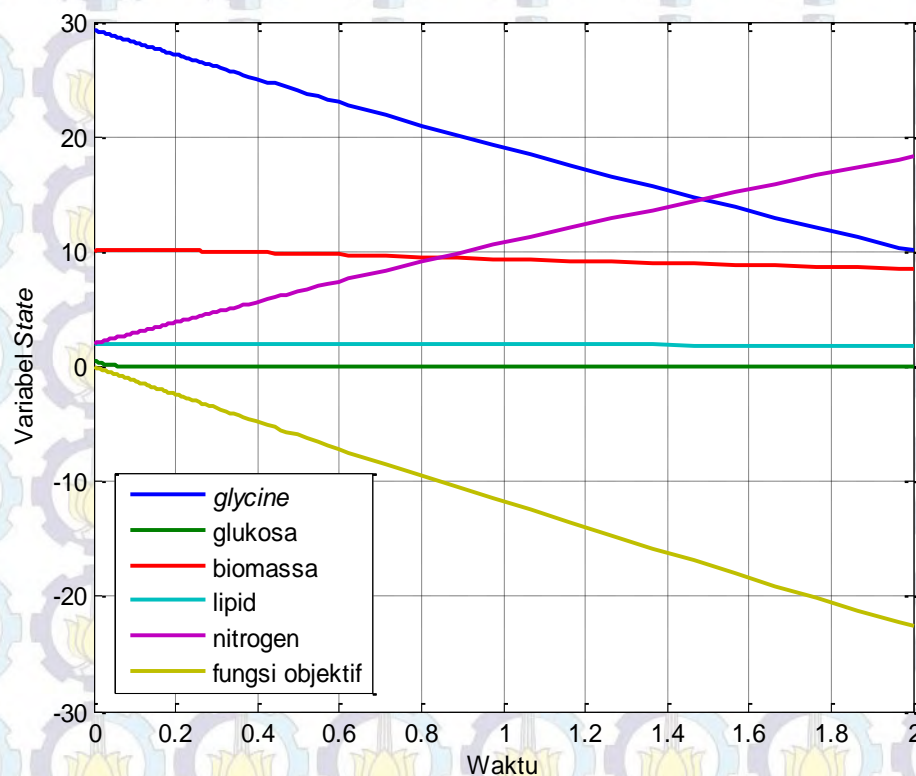
Gambar 4.1-4.7 adalah gambaran sistem tanpa pengendalian. Dengan kata lain, tidak ada pengendalian terhadap pemberian makanan mikroalga. Tanpa pengendalian dalam mengatur laju pemberian makanan mikroalga, membuat

solusi dari sistem tidak sesuai dengan yang diharapkan. Hal ini tentunya mempengaruhi hasil panen dari budidaya mikroalga.

4.5.2 Simulasi Model dengan Kendali

Syarat awal yang digunakan pada simulasi numerik untuk mencari nilai kendali optimal adalah $S_1(0) = 29.3$, $S_2(0) = 0.57$, $x(0) = 10$, $p(0) = 2$, dan $q(0) = 2$. Artinya, konsentrasi awal *glycine* di dalam bioreaktor adalah 29.3 gr/L, konsentrasi awal glukosa di dalam bioreaktor adalah 0.57 gr/L, konsentrasi awal biomassa di dalam bioreaktor adalah 10 gr/L, sedangkan konsentrasi awal lipid dan nitrogen di dalam bioreaktor adalah 2 gr/L. Dengan parameter C_1 dan C_2 menggambarkan seberapa besar pengaruh pemberian makanan berupa *glycine* dan glukosa terhadap fungsi tujuan pada sistem.

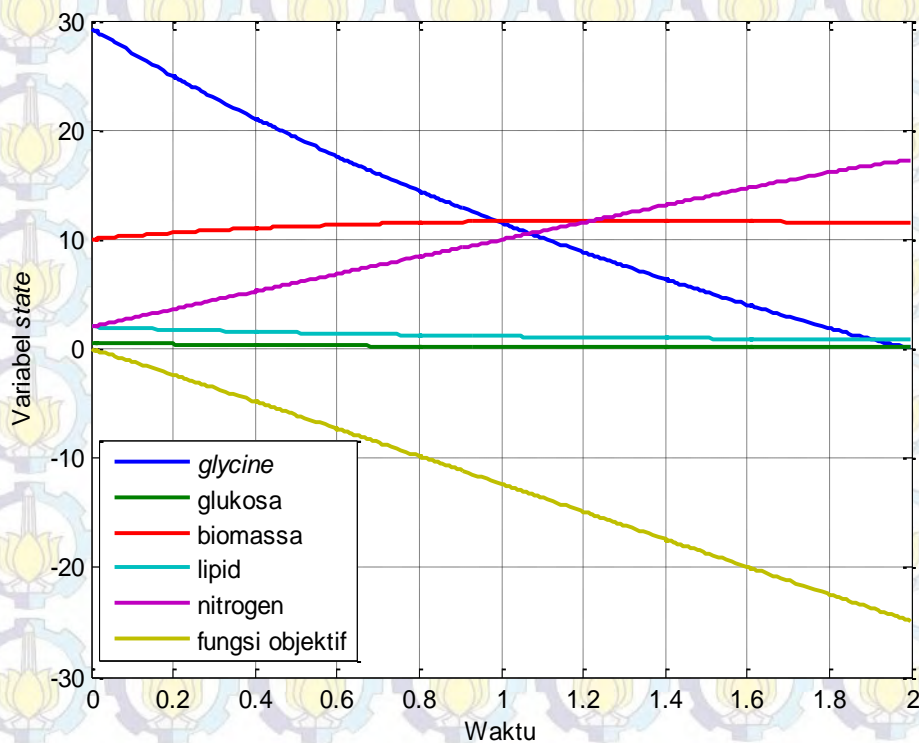
Gambar 4.8 adalah simulasi numerik yang menunjukkan pertumbuhan mikroalga tanpa ada pengendalian dalam pemberian makanan. Gambar 4.8 diperoleh jika diambil nilai $C_1 = 1$ dan $C_2 = 1$. Dalam hal ini diasumsikan pemberian *glycine* mempunyai pengaruh yang sama besar dengan pemberian glukosa.



Gambar 4.8 Simulasi Numerik Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch* Tanpa Strategi Pemberian Makanan

Tanpa adanya pengendalian dalam pemberian makanan, diperoleh konsentrasi *glycine*, glukosa, biomassa, lipid, dan nitrogen, secara berurutan adalah sebesar 10.08 gr/L, -0.02 gr/L, 8.55 gr/L, 1.83 gr/L, dan 18.28 gr/L. Sedangkan fungsi objektifnya bernilai -22.59.

Penerapan pengendalian optimal pada model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor disajikan dalam Gambar 4.9. Dengan adanya pengendalian dalam pemberian makanan, diperoleh konsentrasi *glycine*, glukosa, biomassa, lipid, dan nitrogen, secara berurutan adalah sebesar 0.10 gr/L, 0.10 gr/L, 11.49 gr/L, 0.81 gr/L, dan 17.18 gr/L. Sedangkan fungsi objektifnya bernilai -24.88.

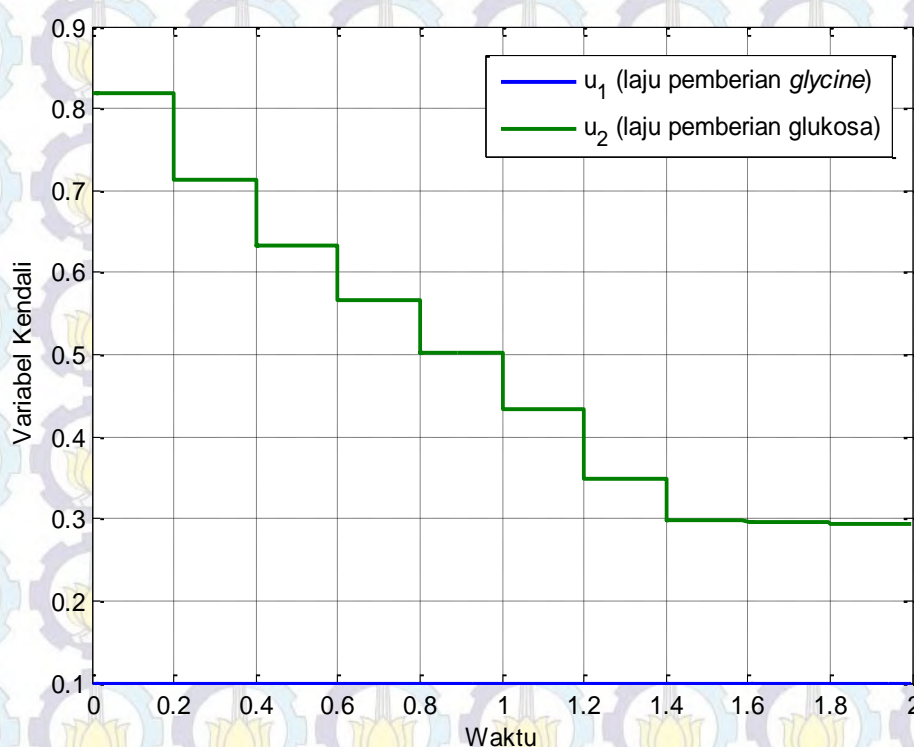


Gambar 4.9 Simulasi Numerik Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch* dengan Strategi Pemberian Makanan

Dari perbandingan antara Gambar 4.8 dan Gambar 4.9, diketahui bahwa dengan adanya pengendalian dalam pemberian makanan, konsentrasi *glycine* menurun dari 10.08 gr/L menjadi 0.10 gr/L, konsentrasi glukosa meningkat dari -0.02 gr/L menjadi 0.10 gr/L, konsentrasi biomassa meningkat dari 8.55 gr/L menjadi 11.49 gr/L, konsentrasi lipid menurun dari 1.83 gr/L menjadi 0.81 gr/L,

konsentrasi nitrogen menurun dari 18.28 gr/L menjadi 17.18 gr/L. Sedangkan fungsi objektifnya menurun dari -22.59 menjadi -24.88. Dengan demikian, diketahui bahwa dengan adanya pengendalian dalam pemberian makanan dapat mengoptimalkan hasil panen sekaligus meminimumkan fungsi objektif.

Gambar 4.10 merupakan strategi pemberian makanan optimal pada model pertumbuhan mikroalga. Strategi pemberian makanan inilah yang menyebabkan variabel *state* bernilai optimal, yang disajikan pada Gambar 4.9. Artinya, dengan mengetahui laju pemberian makanan optimal, diperoleh hasil panen dan biaya pemberian makanan yang optimal. Laju pemberian *glycine* yang optimal adalah konstan sebesar 0.10 mL/hari. Sedangkan laju pemberian glukosa yang optimal adalah 0.81 mL/hari pada interval pertama, 0.71 mL/hari pada interval kedua, 0.63 mL/hari pada interval ketiga, 0.56 mL/hari pada interval keempat, 0.50 mL/hari pada interval kelima, 0.43 mL/hari pada interval keenam, 0.34 mL/hari pada interval ketujuh, 0.29 mL/hari pada interval kedelapan, kesembilan, dan kesepuluh.



Gambar 4.10 Strategi Pemberian Makanan Optimal dalam Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Bioreaktor *Fed-Batch*

Gambar 4.8-4.10 adalah hasil simulasi dengan memilih nilai $C_1 = 1$ dan $C_2 = 1$. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk beberapa nilai C_1 dan C_2 yang lain, sehingga diperoleh nilai-nilai variabel kendali dan variabel *state*-nya. Tabel 4.2 dan Tabel 4.3 menyajikan perbandingan antara nilai-nilai variabel kendali dan variabel *state* pada model pertumbuhan mikroalga dalam bioreaktor dengan pengendalian dan tanpa pengendalian.

Tabel 4.2 menggambarkan variabel kendali dari model dengan pengendalian dan tanpa pengendalian. Tanpa pengendalian, laju pemberian makanan selalu konstan dari waktu awal sampai waktu akhir. Sedangkan dengan pengendalian, laju pemberian makanan disesuaikan dengan fungsi tujuan dan kendala-kendala yang didefinisikan. Laju pemberian makanan yang diperoleh pada simulasi dengan kendali inilah yang disebut dengan laju pemberian makanan optimal, yang merupakan kendali optimal dari masalah kendali optimal dalam penelitian ini. Dengan laju pemberian makanan yang optimal, maka diperoleh variabel-variabel *state* yang bernilai optimal.

Dari Tabel 4.3 terlihat bahwa dengan adanya pengendalian laju pemberian makanan, konsentrasi *glycine*, lipid, dan nitrogen dalam bioreaktor cenderung menurun, sedangkan konsentrasi biomassa cenderung meningkat. Hal ini menunjukkan bahwa penyerapan *glycine* dengan adanya pengendalian pemberian makanan lebih optimal daripada tanpa pengendalian. Penyerapan *glycine* yang optimal, menyebabkan konsentrasi nitrogen juga lebih optimal. Konsentrasi nitrogen yang optimal akan mempengaruhi pertumbuhan mikroalga sehingga menjadi optimal. Dengan demikian, konsentrasi biomassa pun menjadi optimal.

Selain itu, tanpa pengendalian, tampak bahwa konsentrasi glukosa mencapai nilai negatif. Hal ini menunjukkan bahwa tanpa pengendalian laju pemberian makanan dapat mengakibatkan solusi menuju nilai yang tidak diinginkan. Sedangkan dengan dilakukan pengendalian, maka diperoleh konsentrasi glukosa yang tidak bernilai negatif. Sama halnya dengan konsentrasi *glycine*, konsentrasi glukosa dalam bioreaktor juga sangat mempengaruhi pertumbuhan mikroalga. Dengan konsentrasi glukosa yang optimal, konsentrasi biomassa menjadi optimal.

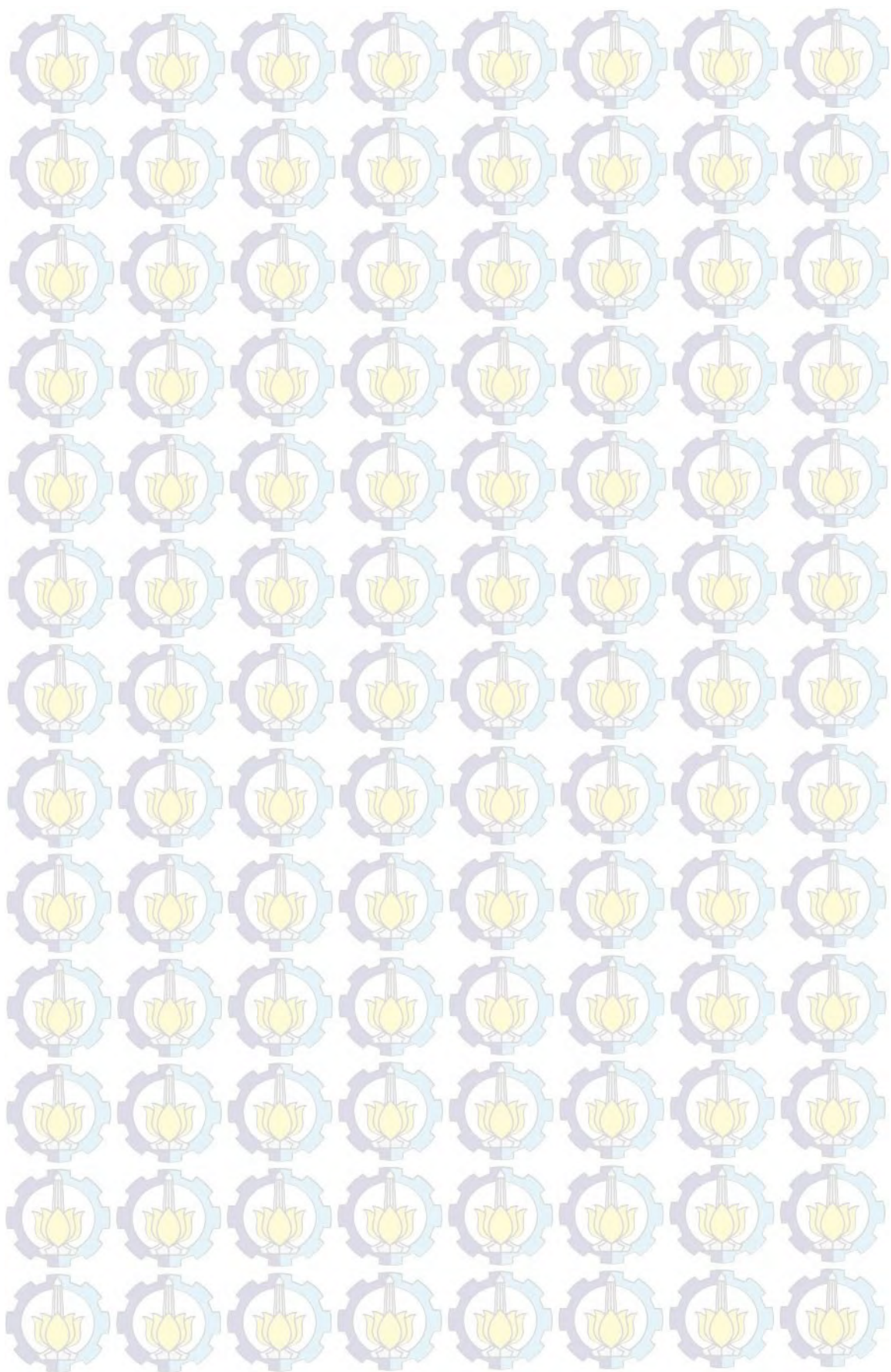
Konsentrasi lipid dengan pengendalian cenderung lebih menurun daripada tanpa pengendalian. Hal ini disebabkan oleh perbedaan nilai konsentrasi glukosa dengan pengendalian dan tanpa pengendalian. Menurunnya konsentrasi lipid dengan pengendalian bukan berarti bahwa hasil panen dengan pengendalian lebih menurun daripada tanpa pengendalian. Hasil panen dengan pengendalian lebih baik daripada tanpa pengendalian, karena hasil jumlahan antara konsentrasi biomassa dan lipid dengan pengendalian lebih tinggi daripada hasil jumlahan antara konsentrasi biomassa dan lipid tanpa pengendalian. Selain itu, dari Tabel 4.3 tampak bahwa dengan adanya pengendalian, diperoleh fungsi tujuan yang nilainya cenderung lebih minimum daripada fungsi tujuan tanpa pengendalian.

Tabel 4.2 Perbandingan Nilai-Nilai Variabel Kendali pada Model Pertumbuhan Mikroalga dengan Pengendalian dan Tanpa Pengendalian

Bobot	Model dengan Kendali										Model Tanpa Kendali	
	\vec{u}_1					\vec{u}_2					$u_1(t)$	$u_2(t)$
$C_1=1, C_2=1$	[0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10]					[0.82 0.71 0.63 0.57 0.50 0.43 0.35 0.29 0.29 0.29]					0.05	0.05
$C_1=1, C_2=2$	[0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10]					[0.92 0.70 0.58 0.50 0.46 0.51 0.32 0.29 0.29 0.29]					0.05	0.05
$C_1=2, C_2=1$	[0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 1.38 1.25]					[0.37 0.27 0.26 0.48 0.58 0.29 0.28 3.36 1.12 2.35]					0.05	0.05
$C_1=2, C_2=2$	[0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10]					[0.79 0.72 0.65 0.58 0.51 0.43 0.34 0.29 0.29 0.29]					0.05	0.05
$C_1=2, C_2=3$	[0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10]					[0.29 0.85 0.85 0.75 0.65 0.33 0.37 0.34 0.33 0.35]					0.05	0.05
$C_1=3, C_2=2$	[0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10 0.10]					[0.79 0.72 0.65 0.58 0.51 0.43 0.34 0.29 0.29 0.29]					0.05	0.05
$C_1=3, C_2=3$	[0.10 0.21 0.10 0.26 0.18 0.10 0.15 0.82 0.63 1.96]					[0.24 1.12 0.35 1.30 0.42 0.27 0.29 0.28 0.27 0.23]					0.05	0.05

Tabel 4.3 Perbandingan Nilai-Nilai Variabel *State* pada Model Pertumbuhan Mikroalga dengan Pengendalian dan Tanpa Pengendalian

Bobot	Model dengan Kendali						Model Tanpa Kendali					
	$S_1(t_f)$	$S_2(t_f)$	$x(t_f)$	$p(t_f)$	$q(t_f)$	$J(t_f)$	$S_1(t_f)$	$S_2(t_f)$	$x(t_f)$	$p(t_f)$	$q(t_f)$	$J(t_f)$
$C_1 = 1, C_2 = 1$	0.10	0.10	11.49	0.81	17.18	-24.88	10.08	-0.02	8.55	1.83	18.28	-22.59
$C_1 = 1, C_2 = 2$	0.099	0.10	11.47	0.82	17.27	-24.61	10.08	-0.02	8.55	1.83	18.28	-22.59
$C_1 = 2, C_2 = 1$	0.097	1.296	11.76	0.12	8.59	-21.65	10.08	-0.02	8.55	1.83	18.28	-22.59
$C_1 = 2, C_2 = 2$	0.10	0.10	11.49	0.81	17.18	-24.61	10.08	-0.02	8.55	1.83	18.28	-22.59
$C_1 = 2, C_2 = 3$	0.099	0.13	11.67	0.78	16.82	-24.20	10.08	-0.02	8.55	1.83	18.28	-22.59
$C_1 = 3, C_2 = 2$	0.099	0.10	11.49	0.81	17.18	-24.59	10.08	-0.02	8.55	1.83	18.28	-22.59
$C_1 = 3, C_2 = 3$	0.22	0.11	8.27	0.58	12.26	-21.21	10.08	-0.02	8.55	1.83	18.28	-22.59



BAB 5

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh simpulan dari tesis ini yakni sebagai berikut:

1. Model pertumbuhan mikroalga dapat dimodifikasi dengan mengubah asumsi variabel dan parameter yang ada di dalamnya.
2. Model pertumbuhan mikroalga dalam tesis ini mempunyai titik

kesetimbangan $E_1 = \left(\frac{s_1^i f_1^i}{VD}, \frac{s_2^i f_2^i}{VD}, 0, 0, 0 \right)$ dan $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$. Titik

kesetimbangan $E_1 = \left(\frac{s_1^i f_1^i}{VD}, \frac{s_2^i f_2^i}{VD}, 0, 0, 0 \right)$ bersifat stabil asimtotik jika laju

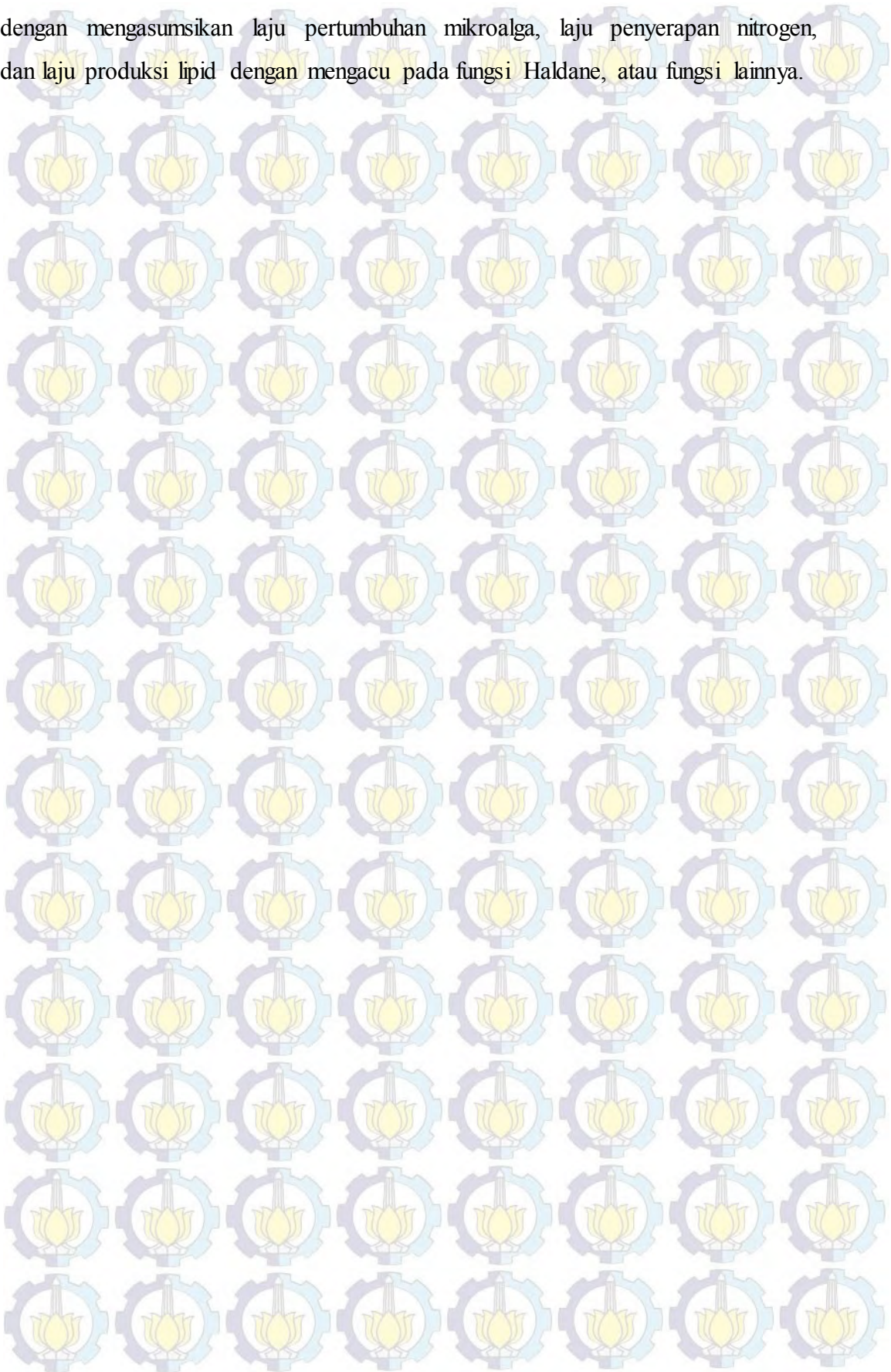
pengenceran lebih besar dari pada laju pertumbuhan maksimal mikroalga dan titik kesetimbangan $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$ bersifat tak stabil.

3. Ketidakstabilan titik kesetimbangan $E_2 = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$ dipengaruhi oleh nilai konstanta setengah jenuh nitrogen dan *glycine*.
4. Simulasi menunjukkan bahwa hasil analisis kestabilan secara analitik sudah sesuai dengan hasil numerik. Simulasi numerik dengan DOTcvpSB menunjukkan bahwa model pertumbuhan mikroalga dapat dioptimalkan dengan mengendalikan laju pemberian makanan. Adanya pengendalian dalam pemberian makanan pada model pertumbuhan mikroalga mengakibatkan hasil panen lebih optimal. Hal ini ditandai dengan meningkatnya hasil panen yaitu jumlah konsentrasi biomassa dan lipid dalam bioreaktor, serta menurunkan biaya pemberian makanan.

5.2 Saran

Penelitian dalam tesis ini mendefinisikan parameter laju pertumbuhan mikroalga, laju penyerapan nitrogen, dan laju produksi lipid dengan mengacu kepada kinetika Michaelis-Menten. Untuk selanjutnya dapat dilakukan penelitian

dengan mengasumsikan laju pertumbuhan mikroalga, laju penyerapan nitrogen, dan laju produksi lipid dengan mengacu pada fungsi Haldane, atau fungsi lainnya.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdollahi, J., & Dubljevic, S. (2012). Lipid Production Optimization and Optimal Control of Heterotrophic Microalgae Fed-Batch Bioreactor. *Chemical Engineering Science* 84, 619-627.
- Boyce, W., & DiPrima, R. (2005). *Elementary differential equations and boundary value problems*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Brannan, J. R., & Boyce, W. E. (2011). *Differential Equations: An Introduction to Modern Methods and Applications*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- British Petroleum. (2014). *BP Statistical Review of World Energy June 2014*. London: BP.
- Chisti, Y. (2007). Biodiesel from Microalgae. *Biotechnology Advances* 25, 294-306.
- De la Hoz Siegler, H., Ben-Zvi, A., Burrell, R. E., & McCaffrey, W. C. (2011). The Dynamics of Heterotrophic Algal Cultures. *Bioresource Technology* 102, 5764-5774.
- De la Hoz Siegler, H., McCaffrey, W. C., Burrell, R. E., & Ben-Zvi, A. (2012). Optimization of Microalgal Productivity Using an Adaptive Non-Linear Model Based Strategy. *Bioresource Technology* 104, 537-546.
- Hirmajer, T., Balsa-Canto, E., & Banga, J. (2009). DOTcvpSB, A Software Toolbox for Dynamic Optimization in Systems Biology. *BMC Bioinformatics*, 199.
- Ibarra-Junquera, V., Jorgensen, S. B., Virgen-Ortiz, J. J., Escalante-Minakata, P., & Osuna-Castro, J. A. (2012). Following an Optimal Batch Bioreactor Operations Model. *Chemical Engineering and Processing* 62, 114-128.
- Naidu, D. S. (2003). *Optimal Control Systems*. Florida: CRC Press LLC.
- Subiono. (2013). *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

BIODATA PENULIS



Nailul Izzati lahir di Lamongan pada 27 Januari 1989. Penulis merupakan anak ke-8 dari sepuluh bersaudara dari pasangan Muchlis Thoha-Nur Jannah. Penulis memulai pendidikannya di TK Aisyiyah Bustanul Athfal 03 Lamongan (1993-1995). Kemudian melanjutkan ke MI Muhammadiyah 04 Lamongan (1995-2001) dan SMP Muhammadiyah 12 Lamongan (2001-2004). Pada tahun 2004 penulis pindah ke Malang dan melanjutkan studinya di SMA Negeri 4 Malang (2004-2007) dan Universitas Brawijaya Malang Jurusan Matematika Bidang Minat Pemodelan (2007-2012). Lalu pada tahun 2013 penulis melanjutkan studi dalam bidang yang sama di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Untuk informasi lebih lanjut mengenai tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui surel nellizz89@yahoo.com.